

Mathematik

Klasse 6B

O. Riesen

1. Kurvenbetrachtungen

Für jedes $t > 0$ ist durch $y = f_t(x) = \frac{x^2 - t \cdot x + 3}{x^2}$ eine Kurve gegeben.

- Betrachte die Kurve $f_4(x)$, d.h. setze $t = 4$. Führe für $f_4(x)$ eine Kurvendiskussion durch. [Verlangt werden: Definitionsbereich, Pole, Asymptoten, Nullstellen, Extremalstellen, Wendepunkte.]
- Skizziere die Kurven $f_2(x)$, $f_4(x)$ und $f_6(x)$ in ein geeignet gewähltes Koordinatensystem.
- Berechne die von der Kurve $f_6(x)$ und der x -Achse eingeschlossene endliche Fläche. Das Integral ist ausführlich herzuleiten.
- Wie gross muss t sein, damit der Wendepunkt der Kurve $f_t(x)$ auf der x -Achse liegt?

2. Zahlenfolge

Eine Folge (a_n) ist rekursiv gegeben durch $a_{n+1} = \frac{4}{5} \cdot a_n + 1$.

- Setze den Startwert $a_1 = 2$. Berechne die Folgenglieder a_2 bis a_5 und diskutiere die Folge. [Verlangt werden: Monotonie, Grenzen (inf = ? usw.), Grenzwert (lim = ?)]
- Die explizite Definition der unter a) berechneten Folge hat die Form $a_n = t \cdot b^n + c$. Berechne t , b und c und beweise das Erhaltene mit vollständiger Induktion.
- Betrachte die Differenzenfolge $d_n = a_{n+1} - a_n$.
Beweise oder widerlege: Bei dieser Folge (d_n) handelt es sich um eine GF.
- Jetzt betrachten wir andere Startwerte a_1 . Für welche Werte von a_1 ist die Folge streng monoton zunehmend, für welche Werte streng monoton abnehmend?
Hinweis: betrachte einige Startwerte, z.B. $a_1 = 25$ oder $a_1 = 10$ oder $a_1 = -5$.

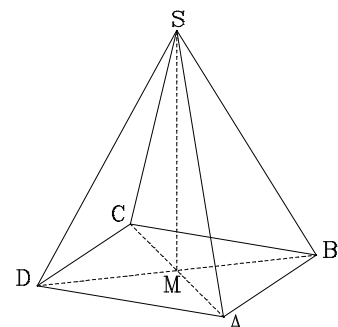
3. Vektorgeometrie

Wir betrachten eine gerade vierseitige Pyramide (siehe die Figur). Vom Quadrat ABCD kennt man die Ecken $A(3 | -2 | 5)$, $B(1 | -1 | 3)$ und $C(2 | y | z)$.

- Bestimme die fehlenden Koordinaten der Ecke C.
Rechne weiter mit der Lösung, für welche $z < 3$.

Falls dir die Lösung zu a) nicht gelingt, dann rechne ersatzweise weiter mit $C(3 | 1 | 2)$

- Bestimme die Koordinatengleichung der Bodenfläche ABCD und die Koordinaten der Punkte D und M.
- Die Pyramide soll ein Volumen von $V = 18$ haben. Bestimme die Koordinaten der Spitze S.



4. Minimale Abstände

Die einzelnen Teilaufgaben sind voneinander unabhängig.

- Welcher Punkt auf der Geraden $g: (5 \mid 1) (1 \mid 3)$ hat zum Punkt $A(10 \mid 20)$ minimalen Abstand?
- Welcher Punkt P auf der Kreislinie $k: x^2 + y^2 + 4x + 2y - 47 = 0$ hat zur Geraden $a: (20 \mid 5) (22 \mid 2)$ minimalen Abstand?
- Welcher Punkt Q auf der Kurve $y = f(x) = 5x \cdot e^x$ hat zum Punkt $X(-1 \mid 0)$ minimalen Abstand?

5. Echte und gefälschte Würfel

Gegeben seien zwei (übliche, symmetrische) Würfel.

- Man nimmt einen dieser Würfel. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man in 4 Würfeln vier verschiedene Zahlen?
- Jetzt nimmt man beide Würfel und wirft sie miteinander. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fallen in 100 Würfeln mindestens 4 Doppelsechser?
- Von einem der beiden Würfel hat man den Verdacht, er sei nicht symmetrisch und die "6" komme zu selten vor. Dazu wirft man ihn 50-mal. Dabei erscheinen nur 4 Sechser. Ist der Verdacht berechtigt? (Begründe; $\alpha = 5\%$)
- Jetzt legt man zu den beiden symmetrischen Würfel einen gefälschten, der die "6" mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% zeigt. Dann zieht man blind einen Würfel und wirft in 5 Würfeln mehr als 3 Sechser. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man den gefälschten Würfel gezogen?

6. Ein Spiel

In einem Behälter befinden sich 2 rote und x weisse Kugeln (wobei $x \geq 2$). Das Spiel läuft wie folgt ab: Man zieht einzeln und *ohne* Zurücklegen so lange, bis man eine rote Kugel gezogen hat, jedoch höchstens 3-mal. Nach drei Ziehungen hört man also mit Ziehen auf, auch wenn man noch keine rote Kugel gezogen hat.

- Zeichne den zum Spiel passenden Baum mitsamt den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.
- Erscheint eine rote Kugel bei der 1. (bzw. 2.; 3.) Ziehung, dann gewinnt der Spieler 10.– (bzw. 20.–; 80.–). Wenn in den drei Ziehungen keine rote Kugel erscheint, dann verliert der Spieler 10.–.
Die Zufallsgrösse G bezeichnet den Gewinn. Berechne $E(G)$ [in Abhängigkeit von x].
- Wie viele weisse Kugeln muss der Veranstalter in den Behälter legen (d.h. wie gross muss x sein), damit das Spiel im Mittel zu seinen Gunsten ausgeht?
- Wie viele weisse Kugeln muss der Spieler in den Behälter legen, damit sein Gewinn möglichst gross wird? Bestimme diesen maximalen Gewinn.
