Mathematik

Klasse 7f O. Riesen

1. **Gedämpfte Schwingung**

Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \sin(2x)$ (Betrachte nur die Werte $x \geq 0$)

a) Führe eine Kurvendiskussion durch. Verlangt werden die ersten beiden Ableitungen, eine Skizze im Bereich $x \in [0\ ,\ 3\pi]$ und für $x \in [0\ ,\ \pi]$ die Nullstellen, Extremalstellen und Wendepunkte.

b) Der Schnittwinkel der Kurve mit der x-Achse in der Nullstelle $(n\frac{\pi}{2}|0)$ wird mit α_n bezeichnet ($n \in \mathbf{N}_0$). Zeige, dass die Werte $m_n = \tan(\alpha_n)$ eine geometrische Folge bilden. Wie gross ist der Quotient q dieser GF?

c) Bestimme eine lineare homogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten so, dass die gegebene Funktion Lösung dieser Differentialgleichung ist.

2. **Kurvenschar**

Für jedes $k > 0$ ist durch $y = f_k(x) = \frac{2k}{x^2 + k^2}$ eine Kurve gegeben.

a) Zeichne die Kurven $f_1(x)$, $f_2(x)$ und $f_3(x)$ in ein geeignet gewähltes Koordinatensystem.

b) Berechne die von den Kurven $f_1(x)$ und $f_k(x)$ eingeschlossene, endliche Fläche (in Abhängigkeit von k). Für welche Werte von k hat diese Fläche Inhalt π? Bestimme alle möglichen Lösungen für k.

c) Beweise, dass zwei beliebige Kurven $f_a(x)$ und $f_b(x)$ der betrachteten Schar immer zwei Schnittpunkte haben.

d) Zeige, dass die Kurve $y = g(x) = \frac{1}{x}$ alle Kurven $f_k(x)$ der betrachteten Schar berührt.

3. **Vektorgeometrie**

Wir betrachten eine gerade vierseitige Pyramide (siehe die Figur). Vom Quadrat ABCD weiss man, dass A und B auf der Geraden g, C und D auf der Geraden h liegen. Die Spitze S liegt auf der gegebenen Geraden s.

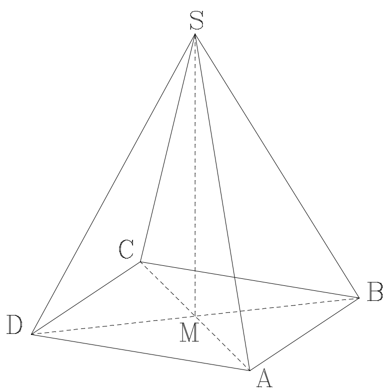
g: (2 | 1 | 3) (0 | 0 | 1)

h: geht durch (0 | 3 | –5) und ist parallel zu g.

s: (0 | 3 | 1) (5 | 2 | 2)

Bestimme alle Ecken der Pyramide.

Empfohlene Reihenfolge der Berechnungen:



a) Koordinatengleichung der Ebene des Quadrats ABCD.

b) Spitze S. [Falls dir die Lösung zu b) nicht gelingt, dann rechne ersatzweise weiter mit dem Wert S(13 | –1 | 2).]

c) Mittelpunkt M des Quadrates ABCD.

d) Ecken A, B, C, D.

4. **Thema mit Variationen**
   (Die einzelnen Teilaufgaben sind voneinander unabhängig.)
   Ein Ikosaeder trägt auf seinen Seitenflächen die Zahlen 1, 2, 3, ... 19, 20.
   a) Wie viele Würfe des Ikosaeders muss man ausführen, damit mit 99%-iger Sicherheit mindestens eine "20" geworfen wurde?
   b) Wie viele Würfe des Ikosaeders sind nötig, damit mit 99%-iger Sicherheit mindestens 100 Mal die "20" geworfen wurde?
   c) Man betrachtet die Anzahl verschiedener vorgekommener Zahlen. Wie viele Würfe des Ikosaeders sind nötig, damit im Mittel mindestens 15 verschiedene Zahlen vorkamen?
   d) Man wirft das Ikosaeder so lange, bis jede Zahl vorkam. Wie oft wird man durchschnittlich werfen?

5. **Mr X spielt gegen Mr Y**
   In einem Behälter befinden sich 3 weisse und 15 rote Kugeln. Das Spiel besteht darin, drei Kugeln zu ziehen. Wenn man genau eine weisse Kugel zieht, gewinnt man 3.–, andernfalls verliert man 2.– .
   a) Mr X zieht seine Kugeln mit einem Griff. Sein Gewinn sei X. Berechne E(X).
   b) Mr Y zieht seine Kugeln einzeln mit Zurücklegen. Sein Gewinn sei Y. Berechne E(Y).

   Jetzt darf man zu den bereits vorhandenen 18 Kugeln vor der Ziehung noch weisse Kugeln zusätzlich in den Behälter legen. (Es ist nicht erlaubt, Kugeln aus dem Behälter wegzunehmen und es ist auch nicht erlaubt, rote Kugeln dazuzulegen.)
   c) Wie viele weisse Kugeln wird Mr X vor dem Ziehen dazulegen, damit sein zu erwartender Gewinn möglichst gross wird und wie gross kann dieser Gewinn werden? Natürlich zieht Mr X seine 3 Kugeln wieder mit einem Griff.
   d) Wie viele weisse Kugeln wird Mr Y vor dem Ziehen dazulegen, damit sein zu erwartender Gewinn möglichst gross wird und wie gross kann dieser Gewinn werden? Mr Y zieht auch wieder einzeln mit Zurücklegen.

6. **Kurzaufgaben**
   a) Die Gerade g: $x - 2y - 4 = 0$ schneidet den Kegelschnitt
      k: $4x^2 + y^2 - 16x - 14y - 35 = 0$ in einem Punkt im ersten Quadranten.
      Bestimme in diesem Punkt den Schnittwinkel.

   b) Bestimme denjenigen Punkt auf der Kugel k: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 6z = 0$, der von der Geraden g: $(1 \mid -4 \mid 8)$ $(-7 \mid -2 \mid 12)$ am weitesten entfernt liegt.

   c) Eine komplexe Zahlenfolge ist definiert durch $z_{n+1} = z_n^2 + t \cdot z_n + i$.
      Für welche Werte von t hat diese Folge genau einen Fixpunkt? Bestimme die möglichen Werte von t und die dazugehörigen Fixpunkte.

****