4. Die Eulersche Zahl

4.1. Herleitung von e

1. **Stetige Verzinsung**

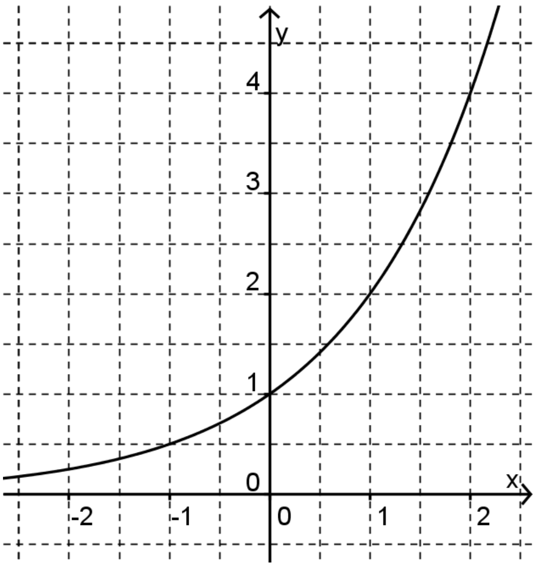
   Wir beginnen mit einer kleinen Geschichte: Herr Spar legt 900 Fr. auf der Bank an und erhält die Zusage, dass er in 24 Jahren doppelt so viel, also 1800 Fr. von der Bank ausbezahlt erhält. (Das entspricht übrigens einer jährlichen Zunahme von ungefähr 3%.)
   Herr Spar überlegt sich, nach 12 Jahren das Geld abzuheben. Weil das Geld nur den halben Zeitraum auf der Bank angelegt war, erhält er also nur den halben Zins. Das sind aber immer noch 450 Fr. Nun nimmt Herr Spar die im zustehenden 1350 Fr. und bringt sie sofort wieder auf die Bank. Für die zweiten 12 Jahre erhält er wieder die Hälfte des angelegten Betrags. Das sind dann 675 Fr. Somit hat Herr Spar am Ende der 24 Jahre 2025 Fr.
   Herr Spar denkt weiter und überlegt sich, wie viel Geld er am Schluss hat, wenn er das Geld schon nach 4 Jahren ein erstes Mal und nach 8 Jahren ein zweites Mal abhebt.

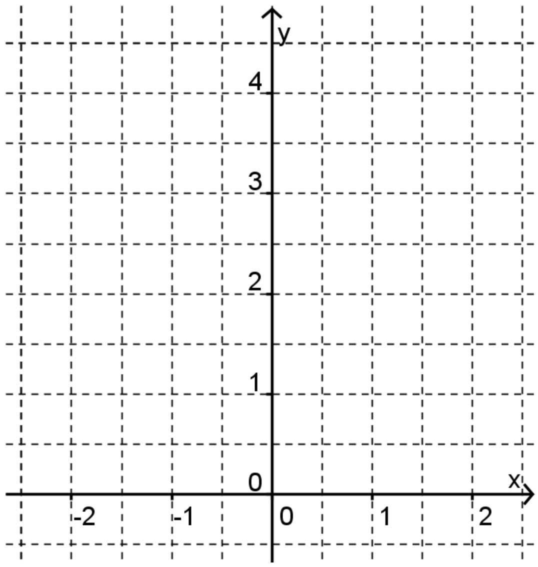
   Wie gross wird der Betrag, den Herr Spar erreicht, wenn er das Geld alle drei Jahre abhebt und sofort wieder anlegt?

   Mathematisch interessant ist nun die Frage, ob Herr Spar am Schluss einen beliebig hohen Betrag erreichen kann, wenn er das Geld jeden Tag, jede Sekunde oder (theoretisch) immer wieder abhebt und sofort anlegt. Es ist auf den ersten Moment vielleicht nicht klar, ob es da eine obere Schranke für den Schlussbetrag gibt oder nicht.

2. **Die Eulersche Zahl**

Wir normieren unser Beispiel von der vorherigen Seite, indem wir als Startwert 1 wählen und festlegen, dass für eine Zeiteinheit der Wert verdoppelt wird. Wir haben somit im Wesentlichen die Funktion $y = 2^x$.





Nun überlegen wir, was passiert, wenn wir die Phase, in der wir das Wachstum dazurechnen, halbieren, dritteln, vierteln, usw.

3. **Definition**

Die Euler'sche Zahl e $\approx 2.718281828\ldots$ ist definiert durch:

4. **Bemerkungen**

Die Euler'sche Zahl e ist in der Mathematik eine sehr wichtige Zahl, nämlich etwa so wichtig wie die Kreiszahl π. Mit e kann man wie mit jeder anderen Konstanten rechnen.

5. **Übungen**

a) $e^2 =$ ....

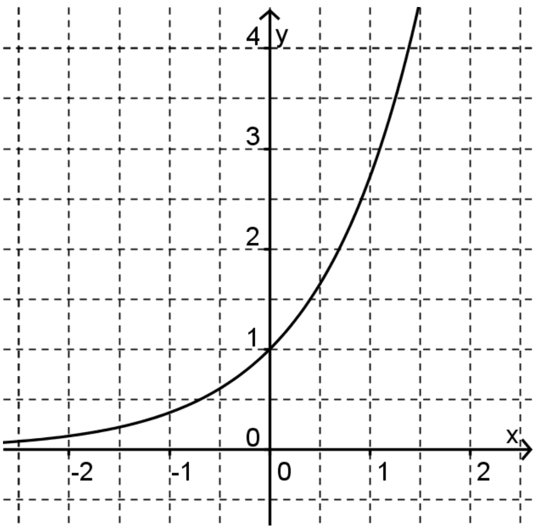
b) $e^3 \cdot e^4 =$ ....

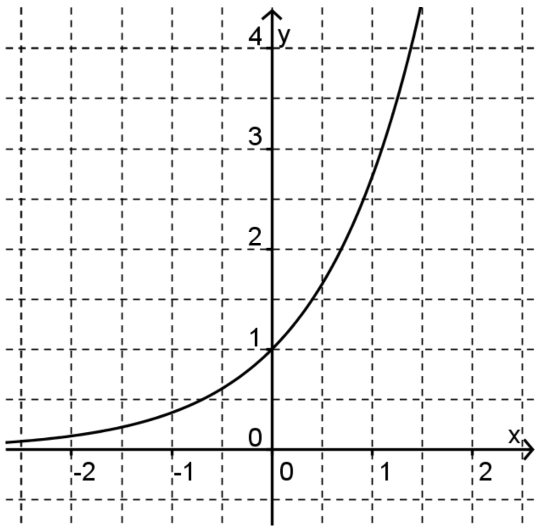
c) $e^{-1} =$ ....

d) $e^4 + e^4 =$ ....

6. **Die natürliche Exponentialfunktion**

$y = f(x) = e^x$ ist die natürliche Exponentialfunktion. Sie hat verschiedene wichtige Eigenschaften, die jedoch erst etwa auf Stufe Matura wichtig sein werden.





4.2. Natürlicher Logarithmus

1. **Bemerkungen**

   Zur Erinnerung: Wenn $y = b^x$ ist, dann ist x der Logarithmus zur Basis b von y. Wir machen nun dasselbe für die Funktion $y = \mathrm{e}^x$.

2. **Definition**

   Der Logarithmus zur Basis e heisst natürlicher Logarithmus und wird mit $\ln(x)$ bezeichnet. (ln steht für *logarithmus naturalis*)

3. **Rechnen mit dem natürlichen Logarithmus**

   a) $\ln(1) =$ ....

   b) $\ln(\mathrm{e}^2) =$ ....

   c) $\ln(\mathrm{e}^3 \cdot \mathrm{e}^4) =$ ....

   d) $\ln(\frac{1}{\mathrm{e}}) =$ ....

   e) $\ln(\mathrm{e}^4 + \mathrm{e}^4) =$ ....

   f) $\ln(\mathrm{e}^x) =$ ....

   g) $\mathrm{e}^{\ln(x)} =$ ....

4. **Funktionsgraphen**

   Die linke Grafik zeigt die Funktion $y = \ln(x)$, die rechte die Funktion $y = \mathrm{e}^x$.