

## 4. Markow-Ketten

### 1) Musterbeispiel

Ein Taxiunternehmen in einer Stadt hat zwei Standorte: Bahnhof und Zentrum. Nach jeder Fahrt sucht der Taxifahrer den nächstliegenden Standort auf, um neue Kunden aufzunehmen. Längerfristige Untersuchungen haben ergeben, dass ein Taxifahrer, der am Bahnhof zur Fahrt mit dem Kunden gestartet ist, in einem Drittel aller Fälle wieder zum Bahnhof zurückkehrt. In zwei Dritteln aller Fälle wird sich dieser Taxifahrer nachher im Zentrum einfinden. Wenn ein Taxifahrer jedoch im Zentrum gestartet ist, dann wird er in drei Vierteln aller Fälle nachher am Bahnhof, und nur in einem Viertel aller Fälle wieder am Standort im Zentrum zu finden sein.

Wir zeichnen einen Graphen, der die Situation übersichtlich wiedergibt.

### 2) Definition

Eine Markow-Kette ist ein Zufallsprozess, der durch verschiedene, normalerweise endlich viele, Zustände und seine Übergangswahrscheinlichkeiten bestimmt ist.

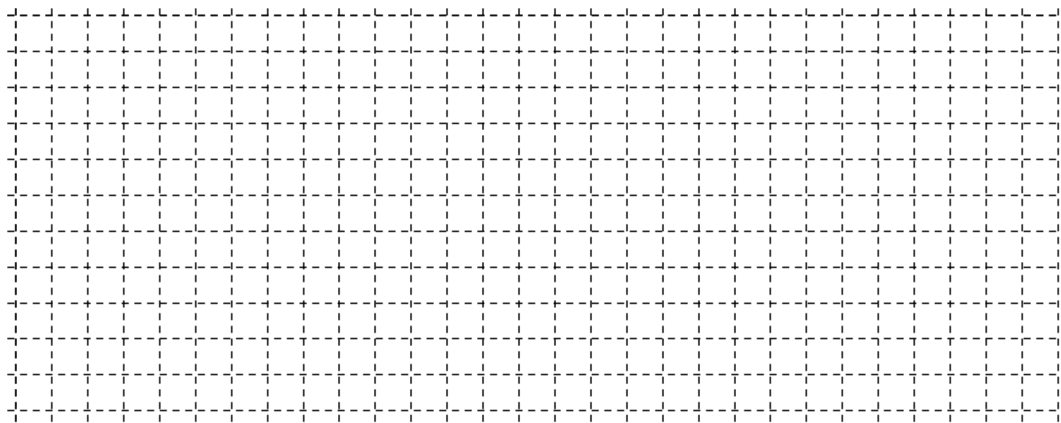
### 3) Musterbeispiel (Fortsetzung)

Die Markow-Kette (der Graph) bildet die Basis für die Berechnungen.

- Wir bestimmen die Übergangsmatrix.
- Angenommen, alle Taxis starten am Morgen am Bahnhof. Wie verteilen sich die Taxis nach einer und nach zwei Fahrten?
- Das Unternehmen stellt fest, dass sechs Taxis am Bahnhof und vier im Zentrum stationiert sind. Wie ist die Verteilung der Taxis nach einer weiteren Fahrt?
- Gibt es eine Verteilung der Taxis, so dass die Verteilung nach einer weiteren Fahrt gleich ist wie vor dieser Fahrt?

### 4) Die stabile Lage

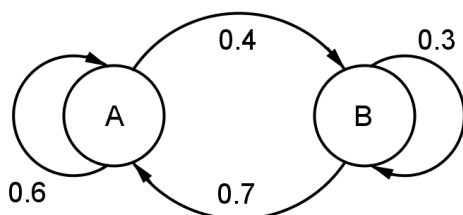
Wir leiten die stabile Lage her.



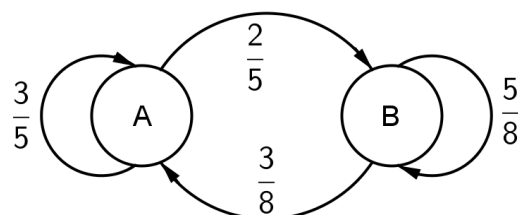
### 5) Übungen

Bestimme die Übergangsmatrix und die stabile Lage für die skizzierten Markow-Ketten.

a)



b)



**6) Potenzen**

Gegeben ist die Übergangsmatrix einer weiteren Markow-Kette:  $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

- Berechne die stabile Lage.
- Berechne höhere Potenzen ( $M^3, M^4, M^5, \dots$ ) dieser Matrix. Was stellt man fest?

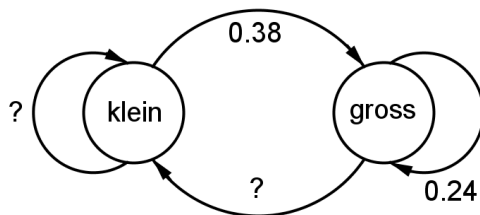
**7) Bemerkungen**

Wir zeigen:

- Die aus der Berechnung der stabilen Lage entstehenden Gleichungen sind immer abhängig.
- Jede Matrix zu einer Markow-Kette hat den Eigenwert 1.

**8) Lernkontrolle**

Eine Sorte Zellen gibt es in zwei Arten: klein und gross. Der Graph zeigt die Übergangswahrscheinlichkeiten der Zustandsänderungen, wobei wir annehmen, dass die Zahlen von einem Tag zum nächsten gelten.



- Angenommen, heute seien 32% der Zellen im kleinen Zustand: Welcher prozentuale Anteil an Zellen ist übermorgen im grossen Zustand?
- Angenommen, heute seien 32% der Zellen im grossen Zustand: Welcher prozentuale Anteil an Zellen war gestern im kleinen Zustand?
- Welcher prozentuale Anteil an Zellen im kleinen resp. grossen Zustand ist langfristig zu erwarten?