3. Lineare Abbildungen

3.1. Abbildungsmatrizen

1) Beispiel

Wir betrachten die lineare Abbildung mit den Gleichungen

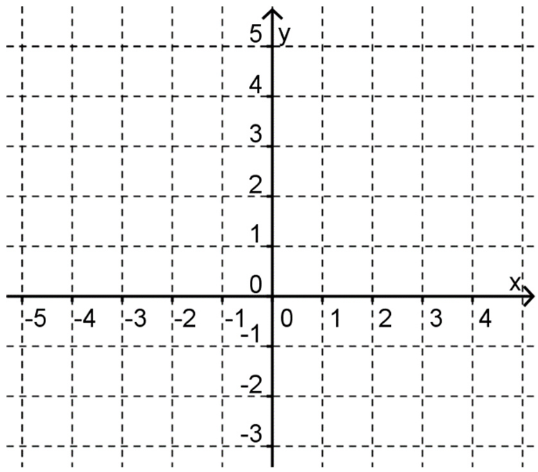
$\overline{x} = 2x - y$

$\overline{y} = x + 3y$

a) Bestimme das Bild des Einheitsquadrats.

....

b) Bestimme das Bild des Ortsvektors $\vec{p} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$



2) Die Abbildungsmatrix

Damit wir nicht für jede Abbildung die Gleichungen ausschreiben müssen, empfiehlt sich die Matrixschreibweise. Für die obige Abbildung notieren wir die Abbildungsmatrix

....

3) Von der Abbildung zur Matrix

Welche Abbildungen gehören zu den folgenden Abbildungen?

a) Spiegelung an der x-Achse.

b) Zentrische Streckung mit Faktor 7 vom Koordinatenursprung aus.

(Übrigens betrachten wir nur Abbildungen, bei denen der Koordinatenursprung fest bleibt.)

4) Von der Matrix zur Abbildung

Beschreibe die Abbildungen möglichst genau.

a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

....

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

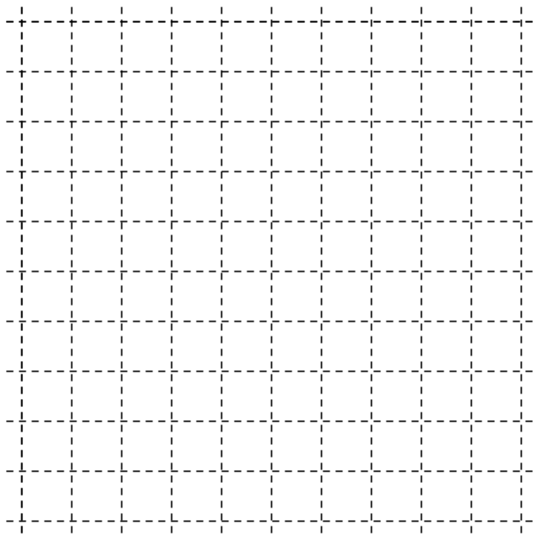
....

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

....

d) $\begin{pmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix}$

....



5) Einheitspunkte

Eine Abbildung wird beschrieben durch $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

Bestimme die Bildpunkte der Einheitspunkte (1 | 0) und (0 | 1). Was fällt auf?

6) Satz

....

....

7) Drehungen

a) Bestimme die Matrix der Drehung (um den Koordinatenursprung) mit Winkel 90°.
b) Welches ist die Matrix zur Drehung mit $\alpha = 60°$?
c) Verallgemeinere: Bestimme die Drehmatrix für beliebige Drehwinkel α.

8) Spiegelungen

a) Man spiegelt an $y = -x$. Wie lautet die Matrix?
b) Man spiegelt an $y = 2x$. Wie lautet die Matrix?

9) Drehstreckungen

a) Man hat eine Drehstreckung mit Winkel 90° und Streckungsfaktor 2.
Bestimme die zugehörige Matrix.
b) Welche Drehstreckung gehört zur Matrix $\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$?
c) Welche Drehstreckung gehört zur Matrix $\begin{pmatrix} 7 & -24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix}$?

---

10) Lernkontrolle

Welche Abbildung gehört zu Matrix $\begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.6 & -0.8 \end{pmatrix}$?

Beschreibe die Abbildung so genau wie möglich.

3.2. Zusammensetzen von Abbildungen

1) Überlegungsaufgabe

Zwei Abbildungen sind durch ihre Matrizen gegeben:

Abbildung 1 hat die Matrix $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, Abbildung 2 hat die Matrix $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

Welche Matrix beschreibt die Abbildung, die entsteht, wenn man zunächst Abbildung 1, danach Abbildung 2 durchführt?

2) Satz

....

....

3) Drehstreckung

Eine Drehstreckung kann man – logischerweise – aus einer Drehung und einer Streckung zusammensetzen. Bestimme so die allgemeine Matrix einer Drehstreckung.

4) Zwei Drehungen

Die erste Abbildung ist eine Drehung mit Drehwinkel α, die zweite Abbildung ist eine Drehung mit Winkel β. Bestimme die Matrix der Zusammensetzung.

Daraus folgert man die Formeln für cos(α + β) und ähnliche.

---

5) Lernkontrolle

Man führt folgende zwei Abbildungen hintereinander aus:

Abbildung 1: Spiegelung an der x-Achse.

Abbildung 2: Spiegelung an der Geraden y = 2x.

Was ist die Zusammensetzung?

3.3. Eigenwerte und Eigenvektoren

1) Beispiel

Eine lineare Abbildung wird beschrieben durch die Matrix $\begin{pmatrix} 0.9 & -0.2 \\ -0.2 & 0.6 \end{pmatrix}$.

a) Bestimme die Bilder der Punkte A(2 | 4) und B(2 | –1).

....

b) Beschreibe diese Abbildung.

....

c) Gibt es noch weitere Ortsvektoren, die auf ein Vielfaches von sich abgebildet werden?

....

2) Eigenwerte, Eigenvektoren

Wir suchen zu einer gegebenen Matrix diejenigen Vektoren, welche auf ein t-faches von sich selber abgebildet werden.
Solche Vektoren nennt man Eigenvektoren, die zugehörigen Werte t nennt man Eigenwerte.

3) Musterbeispiel

Bestimme die Eigenwerte und die Eigenvektoren von $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

4) Übungen

a) $\begin{pmatrix} 0.7 & 0.6 \\ 0.6 & -0.2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren und beschreibe – sofern möglich – die Abbildung.

---

5) Lernkontrolle

Diese Aufgabe stammt aus einer früheren Prüfung: Bestimme Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 2\cdot\sqrt{3} & 3\cdot\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3\cdot\sqrt{3} \end{pmatrix}$