# Lineare Algebra

## 1. Matrizen

### 1.1. Was ist eine Matrix?

**1) Beispiel**

Eine Firma stellt aus Materialien A, B, C, D drei Produkte her. Fürs Produkt X benötigt man fünf Teile A, 7 Teile B und drei Teile D. Fürs Produkt Y benötigt man 12 Teile B, 6 Teile C und 7 Teile D. Das Produkt Z wird aus 4 Teilen A, 5 Teilen B, 11 Teilen C und 13 Teilen D hergestellt.

Ein Kunde kauft 14 Stück vom Produkt X, 18 Stück vom Produkt Y und 22 Stück vom Produkt Z. Welches Material muss der Produzent bereitstellen, damit die verlangte Bestellung ausgeführt werden kann?

| | Material A | Material B | Material C | Material D |
|---|---|---|---|---|
| Produkt X | | | | |
| Produkt Y | | | | |
| Produkt Z | | | | |

Was ist wohl einfacher zu lesen, der Text oder das Zahlenschema?

**2) Beispiel**

Ein Taxiunternehmen hat drei Standorte: Bahnhof, Zentrum und Seepromenade

Jedes Taxi fährt, nachdem der Kunde ausgestiegen ist, zum nächstliegenden Standort. Dadurch ergeben sich gewisse Wahrscheinlichkeiten, wo die Taxis zu stehen kommen.

| | Bahnhof | Zentrum | Seepromenade |
|---|---|---|---|
| Bahnhof | | | |
| Zentrum | | | |
| Seepromenade | | | |

Wie muss man die Taxis verteilen, damit es nicht plötzlich an einem Standort keine Taxis mehr hat?

**3) Definition**

Eine Matrix ..............................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots \\ & \\ & \end{pmatrix}$$

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

## 1.2. Rechnen mit Matrizen

**1) Addition**

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} =$$

**2) Wann existiert die Summe zweier Matrizen?**

................................................................................................................................

................................................................................................................................

**3) Regel**

Wie berechnet man die Summe zweier Matrizen?

................................................................................................................................

................................................................................................................................

**4) Rechengesetze**

A + B = B + A ................................................................................................................

(A + B) + C = A + (B + C) .......................................................................................

**5) Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl**

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & -2 & 0 \end{pmatrix} =$$

**6) Regel**

Wenn man eine Matrix mit einer (reellen) Zahl multipliziert, dann ....

................................................................................................................................

................................................................................................................................

**7) Übungen**

a) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 9 & -2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} =$

b) $2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} =$

**8) Bemerkung**

Wenn man eine Matrix mit einer Zahl multipliziert, dann werden alle Elemente mit dieser Zahl multipliziert. Will man beispielsweise nur die erste Zeile (oder die zweite Spalte) mit einer Konstanten multiplizieren, dann muss man anders vorgehen.

**9) Taschenrechner-Bedienung**

Es gibt mehrere Möglichkeiten, eine Matrix einzugeben und zu speichern:

| | |
|---|---|
| $a:=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ |
| $b:=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$ |
| $a+b$ | $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ |
| $2\cdot a-3\cdot b$ | $\begin{bmatrix} -5 & -6 \\ -4 & 34 \end{bmatrix}$ |

**10) Multiplikation von Matrizen**

In einem ersten Schritt wollen wir herausfinden, wann das Produkt zweier Matrizen überhaupt existiert. Dazu eine Forschungsaufgabe.

**11) Satz**

Das Produkt zweier Matrizen A und B, A·B existiert nur, wenn ...

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

**12) Wie berechnet man das Produkt zweier Matrizen?**

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} b\cdot r+c\cdot t+a\cdot p & b\cdot s+c\cdot u+a\cdot q \\ e\cdot r+f\cdot t+d\cdot p & e\cdot s+f\cdot u+d\cdot q \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a\cdot p+d\cdot q & b\cdot p+e\cdot q & c\cdot p+f\cdot q \\ a\cdot r+d\cdot s & b\cdot r+e\cdot s & c\cdot r+f\cdot s \\ a\cdot t+d\cdot u & b\cdot t+e\cdot u & c\cdot t+f\cdot u \end{bmatrix}$$

Rechenschema fürs Berechnen "von Hand":

**13) Übungen**

a) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 9 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} =$

b) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} =$

c) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} =$

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} =$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. Berechne A·B – 4·A = ?

**14) Potenzieren von Matrizen**

Nur quadratische Matrizen kann man potenzieren.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. Berechne $A^2$ = ?

**15) Rechengesetze**

Gilt A·B = B·A? ..........................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

Gilt A·B = B·A für quadratische Matrizen A und B? ..........................................................

..........................................................................................................................

(A·B)·C = A·(B·C) ..........................................................................................

..........................................................................................................................

A·(B + C) = A·B + A·C ...................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

Hinweis: (B + C)·A = B·A + C·A gilt auch, sofern die Ergebnisse definiert sind, d.h. sofern die Dimension stimmt. Es kann sein, dass ein Produkt in eine Richtung "funktioniert" und in die andere nicht. D.h. an der Reihenfolge der Berechnungen darf im Matrizenkalkül nichts geändert werden.

---

**16) Lernkontrolle**

Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 5 & 8 & -3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & -1 \\ -2 & 8 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

Berechne A·B = ? und B·A = ?, sofern die Produkte existieren.

## 1.3. Spezielle Matrizen

**1) Die Nullmatrix**

Wenn man zu einer Zahl die Null addiert, dann verändert man an der Rechnung nichts. Der Mathematiker spricht in diesem Zusammenhang vom "neutralen Element" der Addition. Ein solches Element gibt es auch bei den Matrizen, genannt Nullmatrix N.

..............................................................................................................................

**2) Überlegungsaufgabe**

Kann das Produkt von zwei Matrizen, A·B, die Nullmatrix ergeben? (Dabei soll natürlich weder A noch B selber die Nullmatrix sein.)

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

Wenn ein Produkt von zwei (reellen) Zahlen Null ergibt, dann muss – mindestens – eine der beiden Zahlen selber die Null sein.
Diese Tatsache ist beim Lösen von Gleichungen wichtig, denn wenn – beispielsweise – $(x-3)(x+5)=0$ gegeben ist, dann ist entweder $x-3=0$ oder $x+5=0$.

**3) Beispiel**

Berechne $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} =$

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

**4) Die Einheitsmatrix**

Schwieriger wird die Aufgabe für die Multiplikation. Gesucht ist eine Matrix I derart, dass für jede beliebige andere Matrix A das Produkt $A \cdot I = A$ ergibt.
(Der Mathematiker spricht vom neutralen Element der Multiplikation.)

..............................................................................................................................

**5) Überlegungsaufgabe**

Kann das Produkt zweier Matrizen die Einheitsmatrix ergeben? ......................................

..............................................................................................................................

**6) Beispiele**

a) Berechne $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} =$

b) Berechne $\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} =$

**7) Umgekehrte Aufgabenstellung**

Gegeben ist eine beliebige Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Gesucht ist die Matrix $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ so, dass das Produkt $A \cdot B$ die Einheitsmatrix I ergibt.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**8) Die inverse Matrix**

Gegeben sei eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Man definiert die inverse Matrix $A^{-1}$ wie folgt:

$A^{-1} =$

..................................................................................................................................

**9) Zwischenbemerkung**

Für nicht quadratische Matrizen gibt es keine Inverse. ("Dimensionsfehler")
Daher betrachten wir momentan nur quadratische $2 \times 2$ – Matrizen.
Für grössere quadratische Matrizen gibt es auch entsprechende Regeln für die inverse Matrix, aber die Berechnung überlassen wir dem Taschenrechner.

**10) Überlegungsaufgabe**

Existiert zu jeder Matrix eine Inverse. (Die Matrix soll nicht die Nullmatrix sein.)

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

**11) Definition**

Gegeben sei eine Matrix A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Man definiert ........................................................

..........................................................................................................................................

**12) Definition**

Eine Matrix A heisst regulär, wenn ..........................................................................................

Eine Matrix A heisst singulär, wenn ..........................................................................................

**13) Satz**

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

**14) Übung**

Gegeben ist die Matrix A = $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & t \end{pmatrix}$.

a) Setze t = 3 und berechne die Inverse $A^{-1}$ = ?
Überprüfe, dass für diesen Fall das Matrixprodukt kommutativ wird, d.h. prüfe, dass in diesem Fall $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A$ gilt.

b) Für welchen Wert von t wird A singulär?

**15) Verständnisfrage**

Wir betrachten auch hier nur quadratische $2 \times 2$ – Matrizen.

a) Für eine Matrix sei bekannt, dass der zweite Spaltenvektor ein Vielfaches des ersten Spaltenvektors ist. Kann resp. muss diese Matrix singulär sein?

b) Umgekehrte Richtung: Von einer Matrix weiss man, dass sie singulär ist. Kann resp. muss der zweite Spaltenvektor ein Vielfaches des ersten Spaltenvektors sein?

---

**16) Lernkontrolle**

a) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = ?$

b) Schreibe für eine beliebige Matrix M = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ den Ausdruck $5 \cdot M$ als Matrixprodukt.

c) Für welche Werte von t wird die Matrix $\begin{pmatrix} t+1 & 10 \\ 2 & t \end{pmatrix}$ singulär?

d) Die Matrix A = $\begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ ist singulär. Finde eine andere Matrix B so, dass das Produkt $A \cdot B$ die Nullmatrix ergibt. (B soll nicht die Nullmatrix sein.)

## 1.4. Gleichungen mit Matrizen

**1) Bemerkung**

Wir betrachten nur Gleichungen mit quadratischen $2 \times 2$ – Matrizen oder Vereinfachungen davon, indem wir "stehende" oder "liegende" Vektoren mit zwei Elementen suchen.

**2) Die beiden Grundsituationen**

Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Gesucht ist die Matrix M so, dass A·M = B erfüllt wird.

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

b) Gesucht ist die Matrix M so, dass M·A = B erfüllt wird.

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

**3) Übung**

a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Berechne M = ?

b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Berechne A = ?

c) $B \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \end{pmatrix}$. Berechne B = ?

---

**4) Lernkontrolle**

Berechne die fehlende Matrix M:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot M - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot M$$