

2. Berechnungen

2.1. Einfache Abstandsberechnungen

1) Längenmeridiane

Wir nehmen für alle Berechnungen einen Erdradius von 6370 km.

- Die Hauptstädte Lima ($12^{\circ} 03' S$) und Washington ($38^{\circ} 54' N$) liegen ziemlich genau auf dem 77. westlichen Längenmeridian. Berechne ihre Entfernung auf der Erdkugel.
- Die Städte Algier ($36^{\circ} 45' N, 3^{\circ} 03' E$) und Lille ($50^{\circ} 36' N, 3^{\circ} 03' E$) liegen auf dem gleichen Längenmeridian. Berechne ihre Entfernung auf der Erdkugel.

2) Direkte Entfernung

Wir nehmen eine Kugel vom Radius 1 m. Die geradlinige Entfernung zweier Kugelpunkte betrage 0.6 m. Wie gross ist die Entfernung dieser beiden Punkte auf der Kugeloberfläche?

3) Breitenkreise

Montreal ($45^{\circ} 30' N, 73^{\circ} 36' W$) und Mailand ($45^{\circ} 30' N, 9^{\circ} 12' E$) liegen auf dem gleichen Breitenkreis.

- Berechne ihre Entfernung auf dem Breitenkreis.
- Berechne ihre Entfernung auf dem Grosskreis.

4) Beispiel

Wenn man von Hongkong ($22^{\circ} 15' N, 114^{\circ} 09' E$) per Schiff auf dem Ozean genau südlich fährt, dann trifft man nach 3030 km Fahrt auf das Sultanat Brunei. Berechne die geografischen Koordinaten von Brunei.

5) Tunnel

Kaliningrad/Königsberg ($20^{\circ} 30' E$) und Novosibirsk liegen auf dem 55° nördlichen Breitenkreis. Wenn man (theoretisch) einen geradlinigen Tunnel von Königsberg nach Novosibirsk bohren will, dann wird dieser Tunnel 6600 km lang. Welches ist die geographische Länge von Novosibirsk?

6) Lernkontrolle

Betrachte die Städte Kairo ($30^{\circ} N, 31^{\circ} E$) und New Orleans ($30^{\circ} N, 90^{\circ} W$)

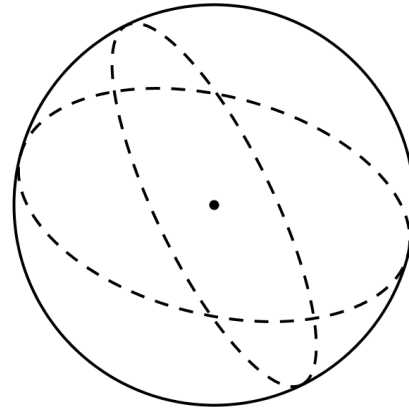
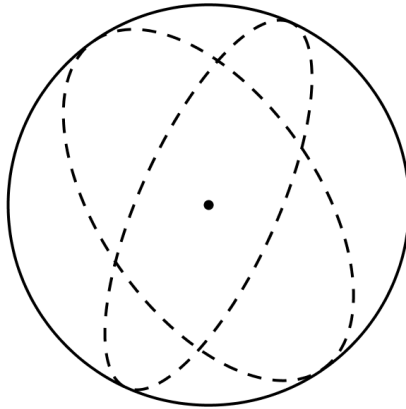
- Berechne ihre Entfernung auf dem Breitenkreis.
- Berechne ihre Entfernung auf dem Grosskreis.
- Wie lange ist (theoretisch) die geradlinige Verbindung durch die Erde hindurch und wie nahe kommt diese Verbindung zum Erdmittelpunkt?

2.2. Flächen

1) Kugelzweiecke

Durch zwei gegenüberliegende Punkte auf der Kugel gibt es unendlich viele Grosskreise. Deshalb kann man auf der Kugel auch Zweiecke haben.

(In der ebenen Geometrie geht das bekanntlich nicht, wenn man die Eckpunkte nur durch kürzeste Verbindungen miteinander verbinden darf.)



Wir berechnen die Fläche eines sphärischen Zweiecks.

.....

.....

2) Kugeldreieck

Zum Berechnen der Fläche eines sphärischen Dreiecks betrachten wir die folgende Figur:

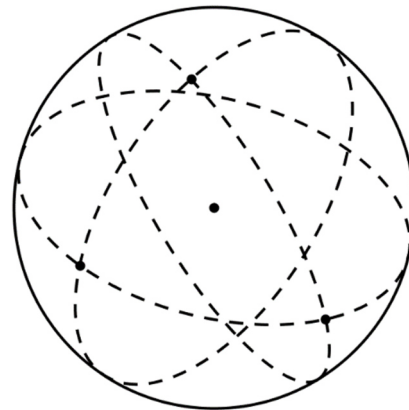
.....

.....

.....

.....

.....



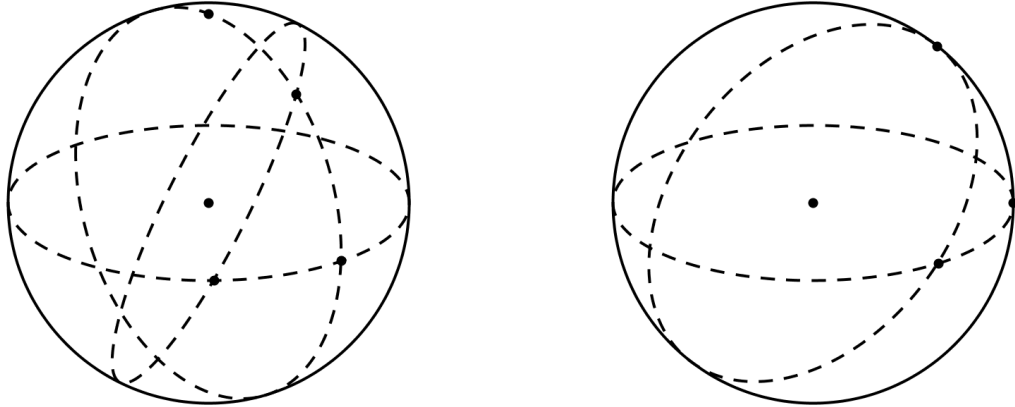
3) Lernkontrolle

- a) Wie gross ist die Fläche des Kugeldreiecks mit drei rechten Winkeln auf der Einheitskugel?
- b) Quito ($78^\circ 30'$ W) und Libreville (9° E) liegen auf dem Äquator. Berechne die Fläche des Dreiecks aus Quito, Libreville und dem Nordpol.

2.3. Rechtwinklige Kugeldreiecke

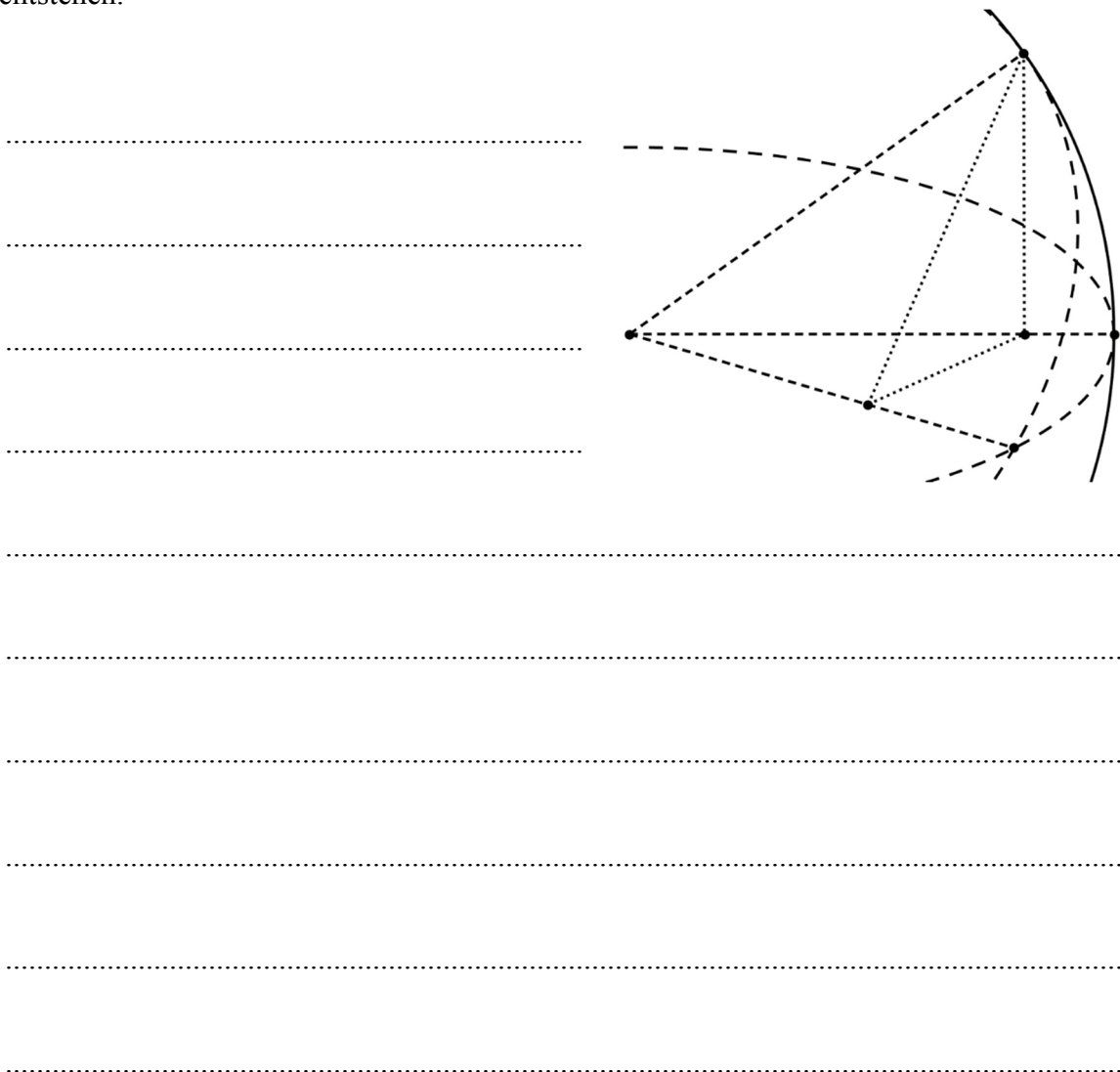
1) Grundsituation

Wir betrachten ein Kugeldreieck mit einem rechten Winkel. Dazu legen wir eine Seite auf den Äquator. Eine andere Seite geht dann durch den Nordpol.



2) Berechnungen

Wir vergrössern die Situation und ergänzen die Figur so, dass vier rechtwinklige Dreiecke entstehen.



3) Übungen

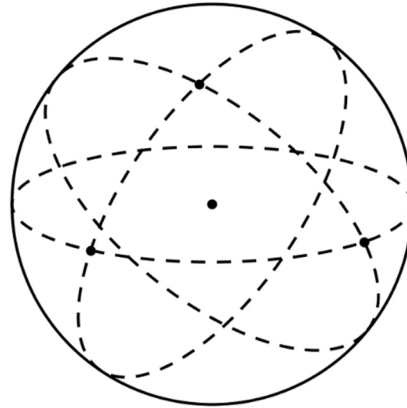
Berechne die jeweils fehlenden Stücke im rechtwinkligen Kugeldreieck ($\gamma = 90^\circ$)

- $a = 65^\circ, b = 55^\circ$. (Berechne c, α, β)
- $a = 36^\circ, \alpha = 40^\circ$.
- $a = 110^\circ, c = 132^\circ$.
- $a = 85^\circ, \beta = 108^\circ$.

4) Gleichschenklige Dreiecke

Wie in der ebenen Geometrie kann man ein gleichschenkliges Dreieck in zwei kongruente, rechtwinklige Dreiecke unterteilen.

Damit kann man die obigen Formeln sinngemäss anwenden.



.....

.....

5) Übungen

- Ein gleichschenkliges Dreieck hat Seitenlängen $115^\circ, 115^\circ, 65^\circ$. Berechne die Winkel.
- Berechne die Seiten des gleichwinkligen Dreiecks mit Winkeln 72.5° .

6) Flugdistanzen

In zwei Fällen können wir mit dem vorhandenen Wissen den Abstand zweier Orte auf der Erdoberfläche bereits berechnen:

- Ein Punkt liegt auf dem Äquator.
Als Beispiel dienen die Städte Quito ($0^\circ \text{ N}, 78^\circ 30' \text{ W}$), Madrid ($40^\circ 24' \text{ N}, 3^\circ 42' \text{ W}$).
- Die Längenmeridiane schliessen einen rechten Winkel ein.
Beispiel: New Orleans ($30^\circ \text{ N}, 90^\circ \text{ W}$), London ($51^\circ 30' \text{ N}, 0^\circ \text{ W}$)

7) Anwendung

Wo liegen die Orte auf dem Äquator, welche von Gibraltar ($36^\circ 12' \text{ N}, 5^\circ 24' \text{ W}$) gleiche Entfernung haben wie Gibraltar vom Nordpol entfernt ist? (Suche sie auf einer Karte.)

8) Anwendung

Sizilien hat nahezu die Form eines gleichschenkligen sphärischen Dreiecks mit Seitenlängen 295 km, 295 km und 186 km. Berechne mit diesen Angaben und dem Erdradius 6370 km die Fläche von Sizilien.

9) Platonische Körper

Welchen Winkel schliessen zwei Seitenflächen eines Ikosaeders miteinander ein?

10) Lernkontrolle

- Im rechtwinkligen Dreieck ($\gamma = 90^\circ$) kennt man die anderen Winkel: 95° und 22° . Berechne die Seiten.
- Die Schenkel eines gleichschenkligen Kugeldreiecks messen 62° , der dazwischen liegende Winkel 84° . Wie lang ist die Basis dieses Dreiecks?

3) Der Winkel-Cosinus-Satz

.....

.....

.....

4) Übungen

Berechne die fehlenden Seiten resp. Winkel der sphärischen Dreiecke.
(Die Beispiele behandeln alle Grundsituationen)

- $a = 64^\circ$, $b = 78^\circ$, $c = 105^\circ$. (Drei Seiten)
- $\alpha = 72^\circ$, $\beta = 68^\circ$, $\gamma = 84^\circ$. (Drei Winkel)
- $a = 34^\circ$, $b = 52^\circ$, $\gamma = 22^\circ$. (Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel.)
- $a = 75^\circ$, $\beta = 36^\circ$, $\gamma = 48^\circ$. (Eine Seite und die beiden anliegenden Winkel.)
- $a = 50^\circ$, $b = 65^\circ$, $\alpha = 54^\circ$. (Zwei Seiten und ein anliegender Winkel.)
- $a = 54^\circ$, $\alpha = 85^\circ$, $\beta = 62^\circ$. (Zwei Winkel und eine anliegende Seite.)

5) Flugdistanz, sphärischer Abstand

- Berechne die kürzeste Entfernung von Seoul ($37^\circ 30' \text{ N}$, 127° E) nach Tokyo ($35^\circ 40' \text{ N}$, $139^\circ 45' \text{ E}$).
- Berechne den sphärischen Abstand der Punkte P und Q.
 $P(\varphi = 65^\circ, \theta = 35^\circ)$ und $Q(\varphi = -45^\circ, \theta = -55^\circ)$.

6) Der Kurswinkel

Ein Flug führt von Madrid ($40^\circ 24' \text{ N}$, $3^\circ 42' \text{ W}$) nach Boston ($42^\circ 18' \text{ N}$, $71^\circ 03' \text{ W}$).
In welchem Winkel muss das Flugzeug in Madrid abfliegen, wenn es auf einem Grosskreis fliegt?

7) Überquerung des Äquators

Ein Frachtschiff fährt von Madras (17° N , $80^\circ 30' \text{ E}$) nach Perth (32° S , 116° E).

- Bei welchem Längengrad überquert das Schiff den Äquator.
- Bestimme in diesem Punkt den Schnittwinkel der Schiffsroute mit dem Äquator.

8) Entfernungen zur Route

Ein Schiff fährt von West Palm Beach (27° N , 80° W) nach Porto ($41^\circ 15' \text{ N}$, $8^\circ 45' \text{ W}$).

- Bestimme den nördlichsten Punkt der Route.
- Wie weit führt diese Route an den Bermudas ($32^\circ 30' \text{ N}$, $64^\circ 30' \text{ W}$) vorbei?

9) Peilung

Ein Schiff auf dem Atlantik sendet ein Notsignal aus. In Plymouth ($50^\circ 18' \text{ N}$, $4^\circ 06' \text{ W}$) wird das Signal unter dem Azimut 225° empfangen, in La Coruña ($43^\circ 24' \text{ N}$, $8^\circ 30' \text{ W}$) unter dem Azimut 300° . Wo ist das Schiff?

10) Lernkontrolle

- Berechne die fehlenden Seiten und Winkel des Dreiecks mit $b = 50^\circ$, $c = 65^\circ$, $\alpha = 25^\circ$.
- Berechne die Länge der Flugroute von New York ($40^\circ 51' \text{ N}$, 74° W) nach Melbourne ($37^\circ 48' \text{ S}$, 145° E)