Ungeordnete Stichproben mit Wiederholung

Studium

Die kombinatorische Formel für ungeordnete Stichproben mit Wiederholung ist einerseits mühsam herzuleiten und hat andererseits kaum praktische Bedeutung. Für Interessierte ist in diesem Dokument eine Herleitung notiert, dass es $\binom{n+k-1}{k}$ ungeordnete Stichproben mit Wiederholung von k aus n Elementen gibt. Am Schluss folgen ein paar Beispiele.

---

1) Vorbereitende Aufgaben

a) Man hat 9 Kisten in einer Reihe und 6 verschiedenfarbige Kugeln. Auf wie viele Arten kann man die Kugeln auf die Kisten verteilen, wenn die Kugeln in verschiedene Kisten gelegt werden sollen?
Das ist eine geordnete Stichprobe ohne Wiederholung.
Die Anzahl Verteilungen beträgt $\frac{9!}{3!}$

b) Man hat 9 Kisten in einer Reihe und 6 identische Kugeln. Auf wie viele Arten kann man die Kugeln auf die Kisten verteilen, wenn die Kugeln in verschiedene Kisten gelegt werden sollen?
Das ist eine ungeordnete Stichprobe ohne Wiederholung.
Anzahl Verteilungen: $\frac{9!}{3!\cdot 6!} = \binom{9}{6}$
Zur Erinnerung: Aus 6! Anordnungen bei unterscheidbaren Kugeln wird jeweils genau eine Anordnung bei identischen Kugeln. Daher ist die Anzahl von Aufgabe a) durch 6! zu dividieren, um die Anzahl von Aufgabe b) zu erhalten.

c) Man hat 9 Kisten in einer Reihe und 6 verschiedenfarbige Kugeln. Auf wie viele Arten kann man die Kugeln auf die Kisten verteilen, wenn die Kugeln beliebig verteilt werden dürfen?
Das ist eine geordnete Stichprobe mit Wiederholung.
Die Anzahl Verteilungen beträgt 9^6.

2) Musterbeispiel

Man hat 9 Kisten in einer Reihe und 6 identische Kugeln. Auf wie viele Arten kann man die Kugeln auf die Kisten verteilen, wenn die Kugeln beliebig verteilt werden dürfen?

Das oben beschriebene Vorgehen (nämlich die Anzahl Verteilungen bei unterscheidbaren Kugeln durch 6! zu dividieren) funktioniert jetzt nicht.

Die Antwort ist also nicht $\frac{9^6}{6!}$, wie man vielleicht zuerst vermutet.

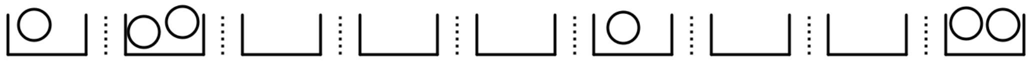
Dafür gibt es zwei Begründungen: Erstens (rechnerisch) $\frac{9^6}{6!}$ ergibt ausgerechnet 738.11 und das kann keine Anzahl Möglichkeiten sein, weil es keine natürliche Zahl ergibt.

Zweitens (anschaulich): Wenn sich die 6 Kugeln alle in einer einzigen Kiste (z.B. in der Kiste ganz links) befinden, dann ist das auch bei unterscheidbaren Kugeln nur eine einzige Möglichkeit (und eine einzige Möglichkeit kann man nicht durch 6! dividieren).

Folglich müssen wir auf eine andere Art vorgehen.

3) Herleitung

Gegeben sind also n = 9 Kisten und k = 6 Kugeln. Ein Beispiel einer Verteilung zeigt die Figur. Wir werden nun die möglichen Verteilungen beschreiben. Die Kugeln stellen wir als Kreise dar und die Kisten trennen wir durch Striche (in der Figur punktiert eingezeichnet).



Bei n = 9 Kisten hat man aber nur n – 1 = 8 Striche zu setzen, weil durch 8 Striche 9 Plätze (inkl. zwei links und rechts aussen für die äussersten Kisten) festgelegt sind.

Wir erhalten also für die in der Figur dargestellte Verteilung die folgende Sequenz aus 8 Strichen und 6 Kreisen: ○||○○|||○|||○○ . Dabei können wir uns die Kisten wegdenken.

Entscheidend ist nun, dass jeder Verteilung der Kugeln auf die Kisten genau einer Sequenz aus Strichlein und Kreisen entspricht (und umgekehrt natürlich auch).

Der Verteilung "Es liegen je 2 Kugeln in der 3., 4. und 7. Kiste (von links)" entspricht somit die Sequenz ||○○|○○|||○○||.

Wenn der Übergang von der Verteilung zur Sequenz klar ist, müssten die folgenden Beispiele zur Illustration genügen.

a) Welcher Sequenz entspricht die folgende Verteilung: 5 Kugeln in der 2. Kiste und eine Kugel in der 6. Kiste (von links)?

b) Welcher Verteilung entspricht die Sequenz |||○○○|||||○○○ ?

(zuerst überlegen, dann weiterlesen!)

....

a) |○○○○○||||○||| b) Je drei Kugeln in der 4. resp. 9. Kiste.

4) Verallgemeinerung

Jeder Verteilung der Kugeln entspricht somit eine Sequenz aus n – 1 = 8 Strichen und k = 6 Kreisen, was eine Sequenz von n + k – 1 = 14 Zeichen ergibt.

Die Anzahl Möglichkeiten für solche Sequenzen beträgt $\binom{14}{6}$.

Die $\binom{14}{6}$ ist übrigens "ungeordnet ohne Wiederholung": wähle 6 Kreise aus 14 Zeichen.

Allgemein hat man n + k – 1 Zeichen in der Sequenz, wovon k Kreise.

Somit gibt es $\binom{n+k-1}{k}$ Sequenzen und folglich gibt es $\binom{n+k-1}{k}$ ungeordnete Stichproben mit Wiederholung.

5) Bemerkung

Von der Logik her gesehen müsste man besser $\binom{n-1+k}{k}$ schreiben, denn die –1 gehört zur Variablen n (und nicht zu k). Nur steht in allen Büchern die andere Formel.

6) Übungen

a) Für die Wahl in ein Parlament mit 10 Sitzen bewerben sich 4 Parteien. (Es sei angenommen, dass jede Partei mit 10 Kandidaten zur Wahl antritt.) Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Sitzverteilung auf die Parteien?

b) Ein Eishockey-Spiel endet 9:4. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Drittelsergebnisse? Beispielsweise 9:4 (2:1, 4:0, 3:3)