# 4. Einführung in Differenzialgleichungen

**1) Was ist eine Differenzialgleichung**

Eine Differenzialgleichung ist eine Gleichung, in welcher eine Funktion y = f(x) gesucht ist. Die Gleichung enthält nebst x und y auch eine oder mehrere Ableitungen von f(x), dazu dürfen Konstanten und Parameter kommen.

**2) Einfache Beispiele**

Wenn die Differenzialgleichung sehr einfach ist, kann man die Lösung erraten.

$y' = y$ hat die Lösung ..................................................................

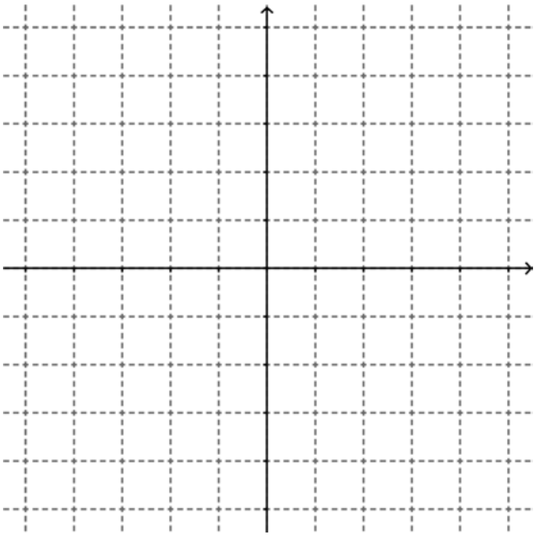
$y' = 4x$ hat die Lösung ..................................................................

Es ist aber dann nicht klar, ob man alle Lösungen gefunden hat.

**3) Richtungsfeld**

Gegeben sei die Differenzialgleichung $y' = -x \cdot y$ .

Wir versuchen, die Lösungsfunktion zu erahnen, indem wir ein Richtungsfeld aufzeichnen.



..................................................................

..................................................................

..................................................................

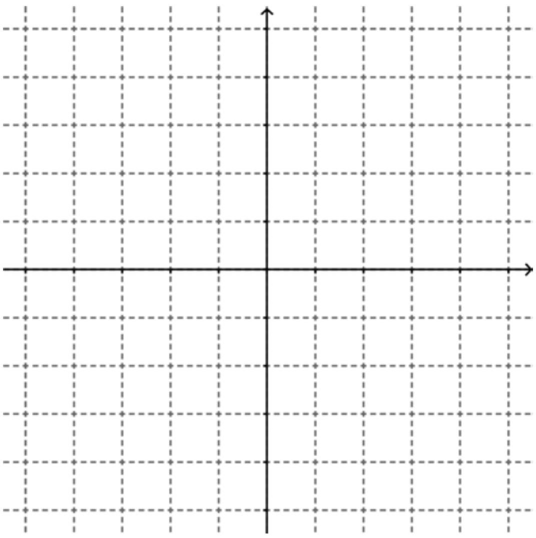
..................................................................

..................................................................

..................................................................

**4) Beispiel**

Zeichne das Richtungsfeld der Differenzialgleichung $y' = \frac{2y}{x}$



..................................................................

..................................................................

..................................................................

..................................................................

..................................................................

..................................................................

**5) Ein Lösungsverfahren**

Wir lösen die Differenzialgleichung $y' = 2 \cdot x \cdot y$ mit Separation der Variablen.

a) y' wird umgeschrieben: ..................................................................

b) Ordnen nach den Variablen: ..................................................................

c) Integrieren auf beiden Seiten: ..................................................................

d) Lösen der Integrale: ..................................................................

e) Auflösen nach y: ..................................................................

**6) Musterbeispiele**

a) $y' = -x \cdot y$

b) $y' \cdot e^{y} = 1$

c) $x \cdot y' + 2y^2 = 0$

d) $x^2 \cdot y' = x \cdot y - y'$

**7) Anfangsbedingungen**

Löse die Differenzialgleichung $y' = \frac{2y}{x}$ mit der Anfangsbedingung y(4) = 2.

**8) Eine Differenzialgleichung zweiter Ordnung**

Wir betrachten die Differenzialgleichung y'' + 5y' + 6y = 0.

Eine solche Differenzialgleichung nennt man lineare homogene Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

linear: ..............................................................................................................................

homogen: ..........................................................................................................................

zweite Ordnung: ................................................................................................................

konstante Koeffizienten: ....................................................................................................

Zur Lösung überlegen wir, dass wir eine Funktion suchen, die nach ein- oder zweimaligem Ableiten im Wesentlichen (d.h. bis auf Konstanten) gleich bleibt.

So eine Funktion gibt es: ....................................................................................................

Folglich machen wir den Ansatz: .......................................................................................

Wir leiten zweimal ab: ........................................................................................................

Jetzt setzen wir in die Differenzialgleichung ein: ...............................................................

Ausklammern: ....................................................................................................................

und nach k auflösen: ..........................................................................................................

liefert die gesuchten Funktionen: .......................................................................................

**9) Musterbeispiele**

a) y'' – 6y' – 16y = 0

b) Löse y'' – 10y' + 16y = 0 mit den Anfangsbedingungen y(0) = 2 und y'(0) = 1.