3. Integrationstechniken

3.1. Partielle Integration

1) Einführungsbeispiel

Berechne $\int x \cdot e^x \, dx$

Mit den bekannten Regeln ist diese Aufgabe nicht lösbar. Weil ein Produkt nicht faktorweise differenziert werden darf, darf ein Produkt auch nicht faktorweise integriert werden.

2) Herleitung der Formel

Wir benötigen die Produktregel für die Ableitung: ....

Diese Gleichung integrieren wir auf beiden Seiten: ....

und formen um: ....

Damit ist die folgende Regel bewiesen: $\int f'(x) \cdot g(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) \, dx$

Dieses Vorgehen nennt man partielle Integration

3) Musterbeispiele

a) $\int x \cdot e^x \, dx =$

b) Bestimme eine Stammfunktion zu $y = f(x) = x \cdot \sin(x)$

c) $\int x^2 \cdot \ln(x) \, dx =$

d) $\int \sin(x) \cdot \cos(x) \, dx =$

[Hier entsteht nach der Berechnung das gesuchte Integral nochmals.]

e) $\int \ln(x) \, dx =$

[Hier fehlt ein zweiter Faktor, also fügt man eine 1 hinzu.]

4) LAPTE

Bei der Methode der partiellen Integration muss man so vorgehen, dass das neu entstehende Integral einfacher wird. Wenn man die Funktionen klassiert nach LAPTE (Logarithmen, Algebraische/Polynome/Potenzen, Trigonometrische und Exponential-funktionen), dann muss man die im "Wort" LAPTE weiter links liegende Funktion ableiten, die weiter rechts liegende Integrieren.

5) Bestimmte Integrale

a) $\int_1^4 \sqrt{x} \cdot \ln(x) \, dx =$ b) $\int_0^4 x \cdot e^x \, dx =$

6) Fläche

Die Funktionskurve zu $y = (x-3) \cdot e^x$ und die beiden Koordinatenachsen begrenzen ein endliches Flächenstück. Berechne dessen Inhalt.

---

7) Freiwillige Übung

Berechne die von $f(x) = (x^2 - 7x + 12) \cdot \ln(x)$ und der x-Achse eingeschlossene Fläche.

3.2. Integration durch Substitution

1) Beispiel

Bestimme die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $y = f(x) = \left(x^2 + 5\right)^6$ $\qquad y' = f'(x) =$

b) $y = f(x) = \sin\left(2x + 1\right)$ $\qquad y' = f'(x) =$

c) $y = f(x) = e^{-x^2+5}$ $\qquad y' = f'(x) =$

Es gilt: $f(u(x))' = f'(u) \cdot u'(x)$ und somit: $\int f'(u(x)) \cdot u'(x) = f(u(x))$

2) Musterbeispiele

Anhand dieser Beispiele müsste auch die Rechentechnik klar werden.

a) $\int 2x \cdot e^{x^2}\,dx =$

b) $\int 10 \cdot \sin(5x - 3)\,dx =$

c) $\int x^2 \cdot \sqrt{1 + x^3}\,dx =$

d) $\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx =$

e) $\int_1^2 \frac{2x}{x^2+1}\,dx =$

f) $\int_0^1 x \cdot e^{-x^2}\,dx =$

3) Technik des Integrierens

Wann erfolgt ein Integrationsvorgang mit partiellem Integrieren, wann ist die Substitutionsregel angezeigt?

Wenn eine "innere Funktion" vorkommt und man die innere Ableitung "sieht", dann ist normalerweise die Substitution richtig; wenn man ein Produkt von zwei Faktoren hat, die man einzeln direkt integrieren bzw. ableiten kann, dann ist das Verfahren der partiellen Integration angezeigt.

---

4) Freiwillige Übung

$$\int_0^1 x \cdot \sqrt{x^2 + 1}\,dx =$$

5) Freiwillige Übung

Die Funktion $y = f(x) = x \cdot \sin(x)$ begrenzt im Bereich $0 \le x \le 2\pi$ mit der x-Achse zwei Flächen. In welchem Verhältnis stehen die beiden Flächen?