3. Integrationstechniken

Ergebnisse

1) Partielle Integration

a) $\int \sqrt{x} \cdot \ln(x)\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} \cdot \ln(x) - \frac{4}{9}x^{3/2} + c$

[Setze $f'(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \ln(x)$. Das ergibt zunächst

$\int \sqrt{x} \cdot \ln(x)\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} \cdot \ln(x) - \int \frac{2}{3}x^{3/2} \cdot \frac{1}{x}\,dx$.]

b) $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,dx = 1/2$

[Setze $f'(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \ln(x)$. Das ergibt zunächst

$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \ln(x) \cdot \ln(x)\Big|_1^e - \int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,dx$.

Jetzt ist rechts das gesuchte Integral entstanden. Also folgt

$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \ln(x)^2\Big|_1^e = \frac{1}{2}$]

c) $\int x^2 \cdot e^x\,dx = \left(x^2 - 2x + 2\right) \cdot e^x + c$

[In beiden Schritten muss man das Polynom ableiten und e^x integrieren.]

2) Substitution

a) $\int_2^3 \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}\,dx = \frac{94}{15} \cdot \sqrt{2} - \frac{56}{15}$ resp. 5.129.

[Setze $u = x - 1$. Dann ist $du = dx$ und $x^2 = (u + 1)^2$.

$\int_2^3 \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}\,dx = \int_1^2 \frac{(u+1)^2}{\sqrt{u}}\,du = \int_1^2 \frac{u^2 + 2u + 1}{\sqrt{u}}\,du = \int_1^2 \left(u^{3/2} + 2u^{1/2} + u^{-1/2}\right)du$

$\frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{4}{3}u^{3/2} + 2u^{1/2}\Big|_1^2 = 5.129.$

Man kann auch zuerst zurücksubstituieren und dann die Grenzen für x einsetzen.]

b) $\int \tan(x)\,dx = -\ln\left(\left|\cos(x)\right|\right) + c$

[Schreibe $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ und setze $u = \cos(x)$. Dann ist $du = -\sin(x) \cdot dx$]

3) Flächenberechnungen

a) $\left|4 - \frac{9}{2} \cdot \ln(3)\right| = 0.944$ b) 5

[Zu a) Löse $\int_1^3 (x-3) \cdot \ln(x)\,dx$ mit partieller Integration. Der Wert des Integrals wird negativ, weil die Fläche unterhalb der x-Achse liegt.]

[Zu b) Löse $\int_0^\infty 10x \cdot e^{-x^2}\,dx$ mit Substitution $u = -x^2$.]