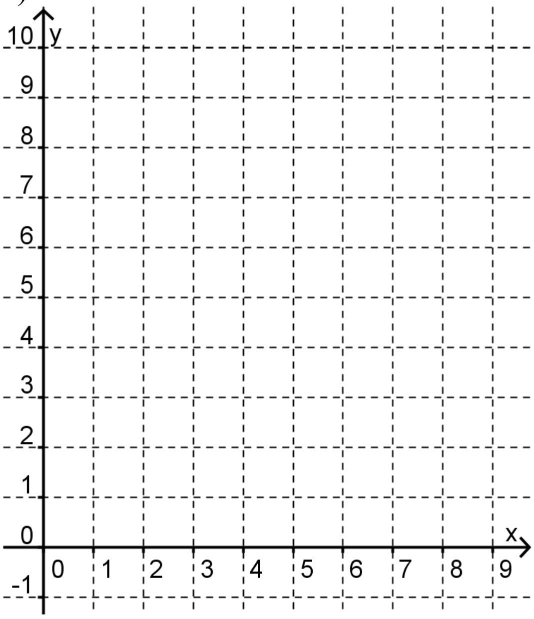
2. Flächenberechnungen

2.1. Die Flächenfunktion

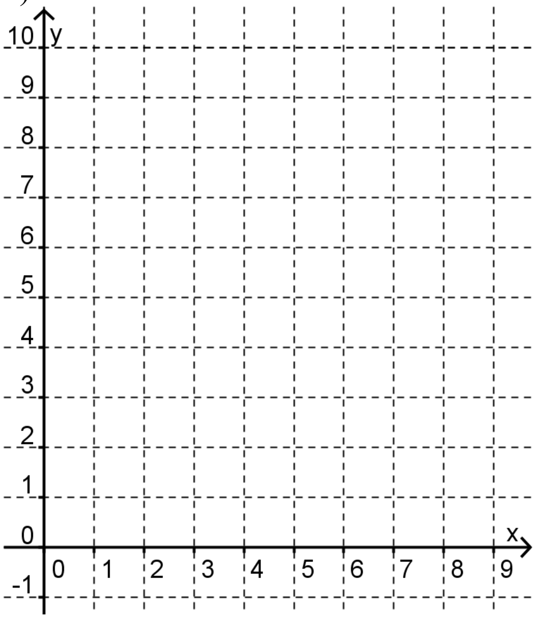
1) Flächenfunktionen aufzeichnen

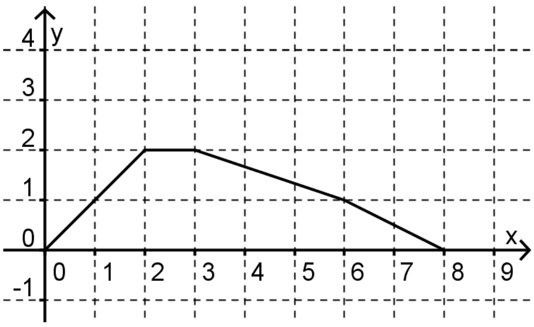
Skizziere zur gegebenen Funktion diejenige Funktion, welche die Fläche unterhalb der Funktionskurve misst. Die Flächenfunktion gehört ins obere Koordinatensystem.

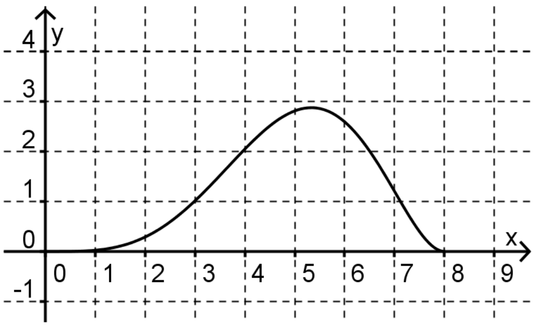
a)



b)





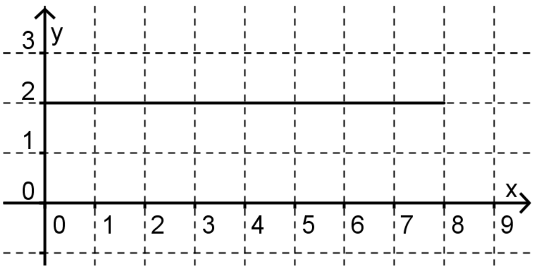


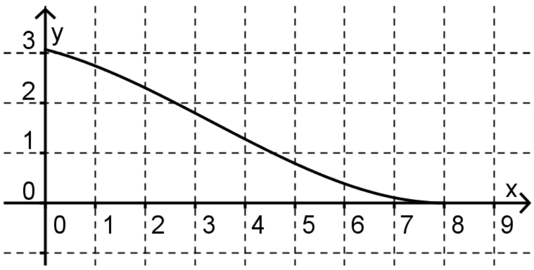
Wir stellen fest: ....

....

2) Geschwindigkeit und Wegstrecke

Das Diagramm zeigt die gefahrene Geschwindigkeit.
Bestimme die zurückgelegte Wegstrecke.

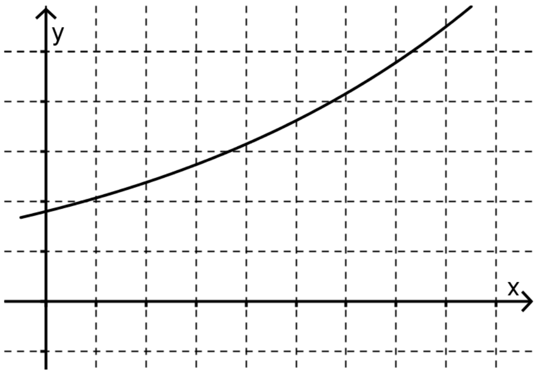


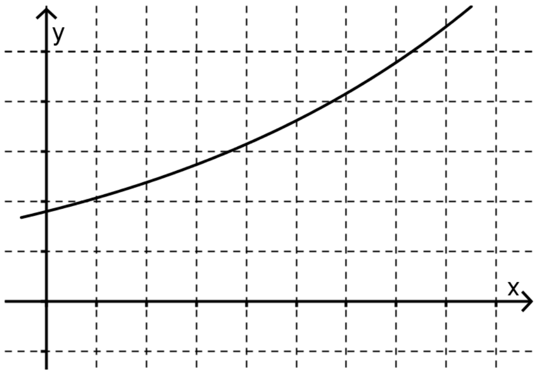


....

3) Historisches

Nun wollen wir die Fläche unter einer Kurve konkret berechnen.
Es sei also eine Funktion y = f(x) gegeben. Um Sonderfälle auszuschliessen soll sie weder Sprung- noch Knickstellen aufweisen und im Intervall $x \in [a,b]$ oberhalb der x-Achse verlaufen.
Wir denken uns die Fläche nun in viele schmale Streifen der Breite Δx zerschnitten. Die gesuchte Fläche können wir nun eingrenzen, indem wir Rechtecke zeichnen.





....

....

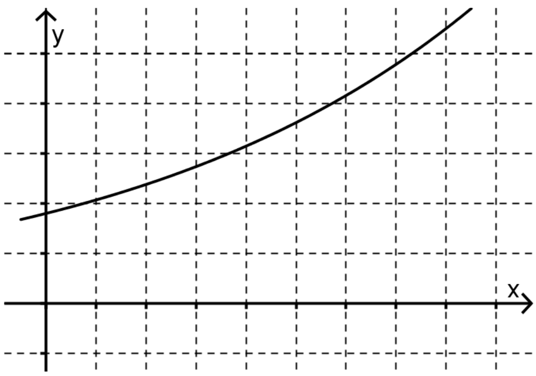
Die Untersumme nähert sich also dem gesuchten Wert der Fläche, wenn wir Δx sehr klein machen. Der Berechnungsfehler wird dann beliebig klein.
Analog nähert sich die Obersumme dem gesuchten Wert, wenn wir Δx sehr klein machen.
Die gezeichneten Rechtecke haben den Flächeninhalt $f(x)\cdot\Delta x$.

Somit beträgt die gesuchte Fläche: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sum\limits_{x=a}^{x=b} f(x)\cdot\Delta x$

Dafür schreiben wir $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ ....

4) Beweis

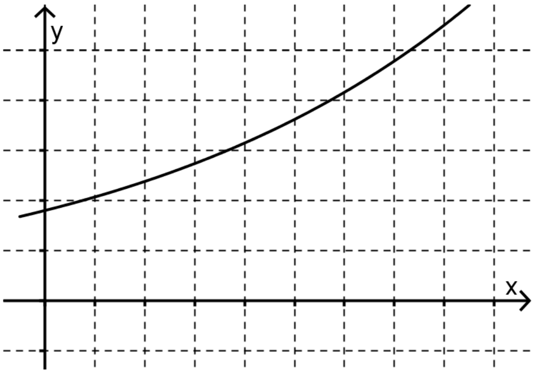
Nun beweisen wir, dass die Ableitung der Flächenfunktion genau die Funktionskurve ergibt. Gegeben sei also eine Funktion y = f(x). Die Flächenfunktion F(x) beschreibt die Fläche unter der Kurve.



Somit gilt F'(x) = f(x), d.h. die Flächenfunktion ist eine Stammfunktion von f(x).

5) Konkrete Berechnung der Fläche unterhalb einer Kurve

Wir haben gezeigt, dass die Flächenfunktion F(x) eine Stammfunktion von f(x) ist.



Wenn wir nun die rechte Grenze der Fläche als Variable x benützen wollen, dann müssen wir vorübergehend unter dem Integral eine andere Variable, beispielsweise t, verwenden. Sonst hätte das x zwei Bedeutungen, nämlich Integrationsvariable und obere Grenze.

Die Fläche bis zur oberen Grenze x wird also beschrieben durch $\int_a^x f(t)\,dt$. Weil wir wissen, dass die Flächenfunktion eine Stammfunktion von f ist, muss $\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + c$ sein.

Dabei ist die Integrationskonstante c vorerst unbestimmt.

Die Integrationskonstante können wir aber nun leicht bestimmen, indem wir x = a setzen. In diesem Fall muss nämlich die Fläche gleich Null sein, weil wir von a bis a integrieren.

Somit folgt 0 = F(a) + c, also c = –F(a). Also gilt $\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$.

Zuletzt können wir die obere Grenze bei b festlegen, die Variable unter dem Integral wieder umbenennen und erhalten $\int_a^b f(x) \cdot dx = F(b) - F(a)$

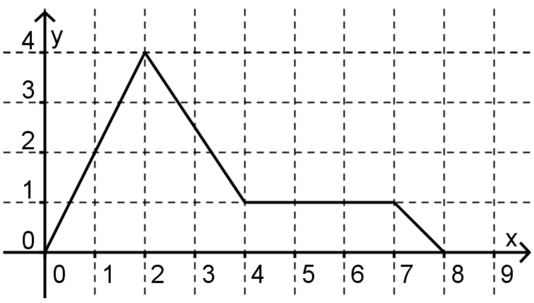
Wir schreiben: $\int_a^b f(x) \cdot dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ ....

....

---

6) Freiwillige Übung

Zeichne die Flächenfunktion zu dieser Funktion y = f(x).

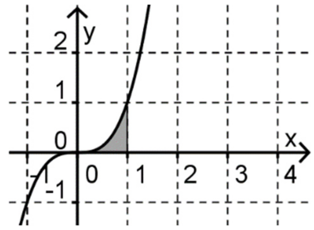


2.2. Flächenberechnungen und bestimmte Integrale

1) Notation

Berechnen der Fläche unterhalb der Kurve $y = x^3$, begrenzt durch die x-Achse und die Gerade $x = 1$.

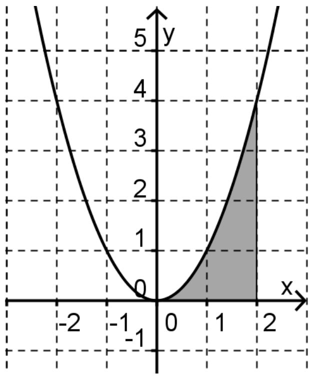
Wir notieren $\int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_0^1 = \frac{1}{4}1^4 - \frac{1}{4}0^4 = \frac{1}{4}$.



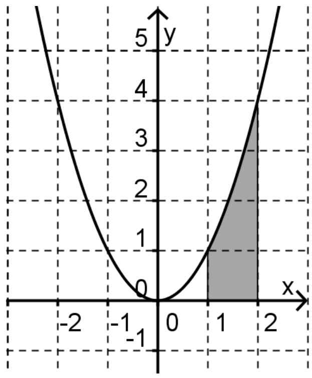
2) Musterbeispiele

Berechne die dargestellten Flächen unterhalb der Parabel $y = x^2$.

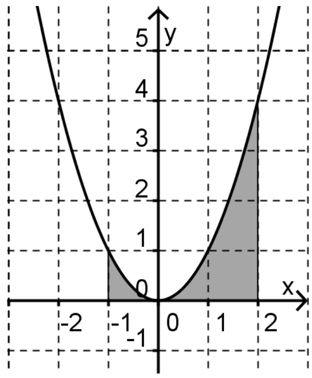
a)



b)



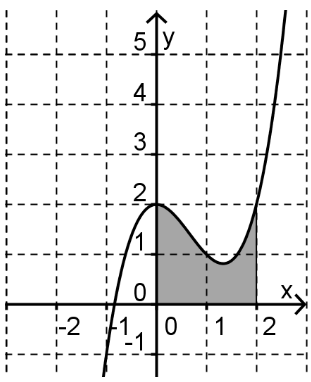
c)



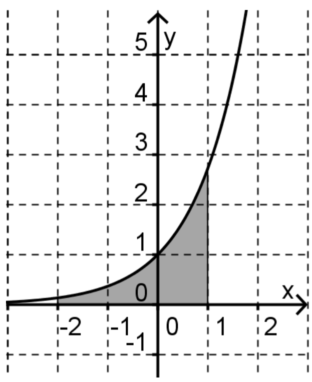
3) Technik des Integrierens

Berechne die dargestellten Flächen. (Löse ohne Taschenrechner.)

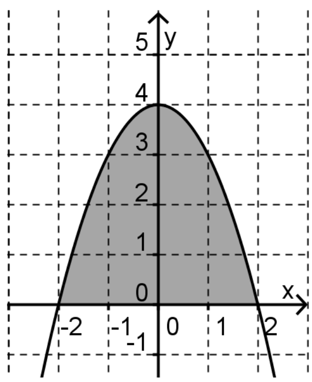
a) $y = x^3 - 2x^2 + 2$



b) $y = e^x$



c) $y = 4 - x^2$



4) Bestimmte Integrale

Löse ohne Taschenrechner:

a) $\int_1^3 4\cdot\sqrt[3]{x}\,dx =$ b) $\int_1^2 \left(\frac{3}{x^3} - \frac{5}{x}\right) dx =$ c) $\int_2^5 \frac{4-x^2}{x}\,dx =$

d) $\int_0^e e^x\,dx =$ e) $\int_0^\pi \sin(x)\,dx =$ f) $\int_1^t t\cdot x^3\,dx =$

5) Grundaufgabe

Berechne die im I. Quadranten unterhalb der Kurve y= f(x) liegende Fläche.

a) $y = f(x) = 6x^2 - x^3$

b) $y = f(x) = -x^3 + 3x^2 + x - 3$

6) Negative Werte

Berechne die zwischen der Parabel $y = x^2 - 3x - 40$ und der x-Achse eingeschlossene endliche Fläche. Welche Schlussfolgerung zieht man aus dem Resultat?

7) Flächen zwischen zwei Kurven
Berechne die zwischen den Kurven $y = x^2$ und $y = x + 6$ eingeschlossene Fläche.

8) Mehr als zwei Schnittpunkte
Berechne die (endliche) Fläche, welche von den Kurven $y = x^3$ und $y = x^2 + 2x$ eingeschlossen wird.

9) Angewandte Flächenberechnung
In welchem Verhältnis teilt die Funktion $y = \sqrt{x}$ die im I. Quadranten unter der Geraden $y = 6 - x$ liegende Fläche?

10) Obere Grenze gesucht
Betrachte das im I. Quadranten liegende Kurvenstück von $y = f(x) = \frac{1}{x}$.
Die im I. Quadranten unterhalb der Kurve liegende Fläche wird links begrenzt durch die Gerade $x = 2$. An welcher Stelle $x = t$ muss man rechts abschneiden, wenn die Fläche Inhalt 10 haben soll?

11) Parameter
Wie gross muss a sein, damit die zwischen der Kurve $y = a - x^2$ und der x-Achse liegende Fläche Inhalt 20 hat?

12) Fläche zwischen der Kurve und der Kurventangente
Die Kurve $y = x^3$ und deren Kurventangente im Punkt $(1 \mid 1)$ schliessen eine Fläche ein. Berechne den Inhalt dieser Fläche.

13) Fläche halbieren
Die Gerade $y = m \cdot x$ soll die im 1. Quadranten unterhalb der Kurve $y = 1 - x^2$ liegende Fläche halbieren. Wie gross ist m?

---

14) Freiwillige Übung

a) Löse ohne Taschenrechner: $\int_{-1}^{2} (3x^2 + 4)\,dx =$

b) Ebenso: $\int_{1}^{4} \left(\frac{5 - 2x}{x^2} \right) dx =$

15) Freiwillige Übung
Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = -x^2 + x + 6$
Betrachte die im I. Quadranten unterhalb der Funktionskurve $y = f(x)$ liegende Fläche F.

a) Die Fläche F wird durch die Gerade $y = x + 2$ in zwei Teilflächen F_1 und F_2 zerschnitten. In welchem Verhältnis stehen die beiden Teilflächen?
Bestimme $F_1 : F_2$ (von links oben nach rechts unten gerechnet).

b) Der Punkt $B(2 \mid ...)$ liegt auf der Kurve $y = f(x)$.
Die Gerade durch die Punkte $A(0 \mid v)$ und $B(2 \mid ...)$ soll die Fläche F genau halbieren.
Berechne v.

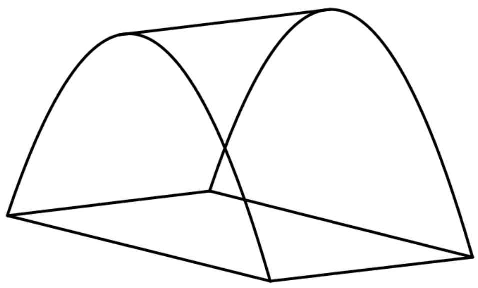
2.3. Angewandte Aufgaben

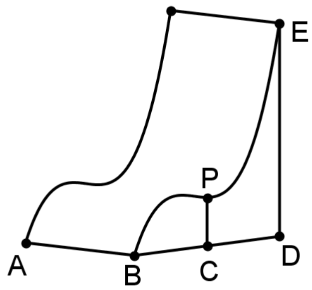
1) Funktionsgleichung bestimmen

Gesucht ist eine Parabel (Polynomfunktion 2. Grades) mit folgenden Eigenschaften:
Die Kurve geht durch den Ursprung und hat dort Steigung 6.
Die Kurve schliesst mit der x-Achse eine Fläche vom Inhalt 12 ein.

2) Festzelt

Der Boden des dargestellten Festzelts (siehe die Skizze) ist ein Quadrat von 10 Metern Seitenlänge. Das Zelt ist 6 Meter hoch. Weiter weiss man, dass die Kurve zwischen der Frontwand und dem gekrümmten Dach eine Parabel ist. Welches Volumen hat das Zelt?





3) Liegestuhl

Welches Volumen hat der skizzierte Liegestuhl (siehe die Skizze oben rechts)?
Die Streckenlängen betragen AB = 50 cm, BC = CD = CP = 30 cm, DE = 90 cm.
Die Kurve ist eine Polynomfunktion 3. Grades und hat in P ihr lokales Minimum.

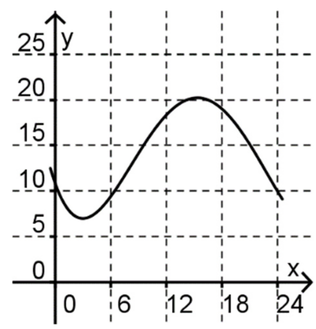
4) Extremalwertaufgabe

Für welchen Wert von $a > 0$ wird die Fläche zwischen den Parabeln $y = a - \frac{x^2}{a}$ und $y = a^3 - ax^2$ extremal? Handelt es sich um ein Maximum oder ein Minimum?

5) Durchschnittswert

Die skizzierte Funktion zeigt einen Temperaturverlauf während 24 Stunden. Berechne die durchschnittliche Temperatur.

$$f(x) = \frac{x^4}{1800} - \frac{31 \cdot x^3}{900} + \frac{5 \cdot x^2}{8} - \frac{72}{25}x + 10.9$$



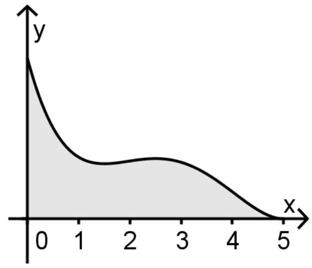
---

6) Freiwillige Übung

Die Skizze gibt die Schadstoffkonzentration in der Luft wieder, welche über eine Zeit von 5 Stunden gemessen wurde.
Wir nehmen an, die Funktionskurve habe die Gleichung

$$f(x) = \frac{x^4}{20} - \frac{3 \cdot x^3}{5} + \frac{19 \cdot x^2}{8} - \frac{15}{4}x + \frac{25}{8}.$$

Berechne die durchschnittliche Konzentration pro Stunde.



2.4. Weitere Anwendungen der Integralrechnung

1) Uneigentliche Integrale, 1. Art

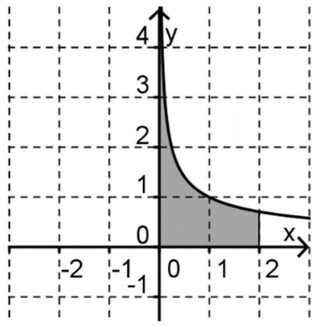
a) Berechne die im I. Quadranten unterhalb der Kurve $y = e^{-x}$ liegende Fläche.

b) Die im I. Quadranten unterhalb der Kurve $y = \frac{1}{x^2}$ liegende Fläche wird links begrenzt durch x = 2. Wie gross wird diese Fläche?

2) Uneigentliche Integrale, 2. Art

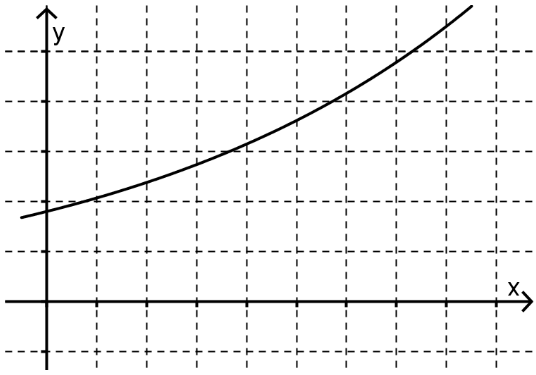
Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Berechne die in der Skizze rechts dargestellte Fläche, welche nach oben unbegrenzt ist.



3) Volumen von Rotationskörpern

Eine Fläche soll um die x-Achse rotieren.
Berechne das Volumen des so entstehenden Körpers.



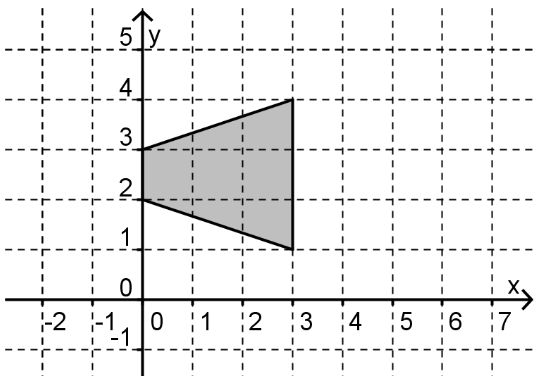
Wir halten fest: ....

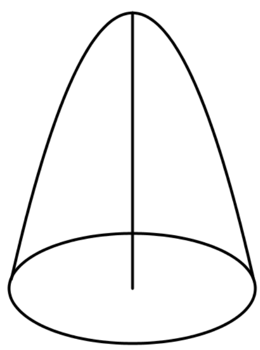
4) Volumenformeln

Beweise mit Hilfe gut gewählter Funktionen die Volumenformeln für Kegel und Kugel.

5) Musterbeispiel

Das in der Skizze links dargestellte, markierte Viereck rotiert um die x-Achse.
Beschreibe den entstehenden Körper und berechne sein Volumen.



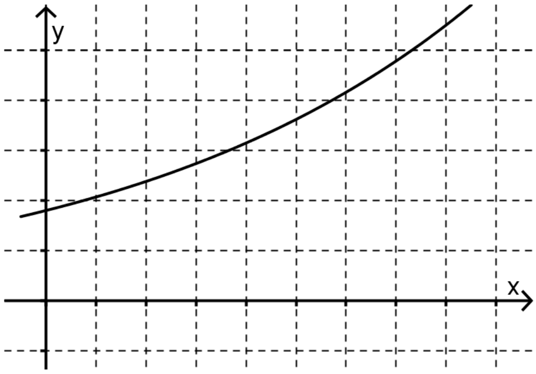


6) Rotationsparaboloid

Die rechts dargestellte "Glocke" hat als Bodenfläche einen Kreis mit 36 cm Durchmesser, ist 25 cm hoch und entsteht, indem ein Parabelbogen um eine Achse rotiert. Berechne das Volumen der Glocke.

7) Länge eines Kurvenbogens

Gegeben sei eine Funktion y = f(x)



Wir halten fest: ....

8) Übung

a) $f(x) = 4 - x^2$. Wie lang ist der im 1. Quadranten liegende Kurvenbogen?

b) $y = f(x) = 2 \cdot x^{\frac{3}{2}}$. Bestimme die Länge des Kurvenbogens zwischen x = 0 und x = 4.

---

9) Freiwillige Übung

Gegeben ist $y = f(x) = \left(4 - \frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$.

a) Die im I. Quadranten unterhalb der Kurve liegende Fläche rotiert um die x-Achse. Berechne das Volumen des so entstehenden Körpers.

b) Wie lang ist der im I. Quadranten liegende Kurvenbogen von y = f(x)?