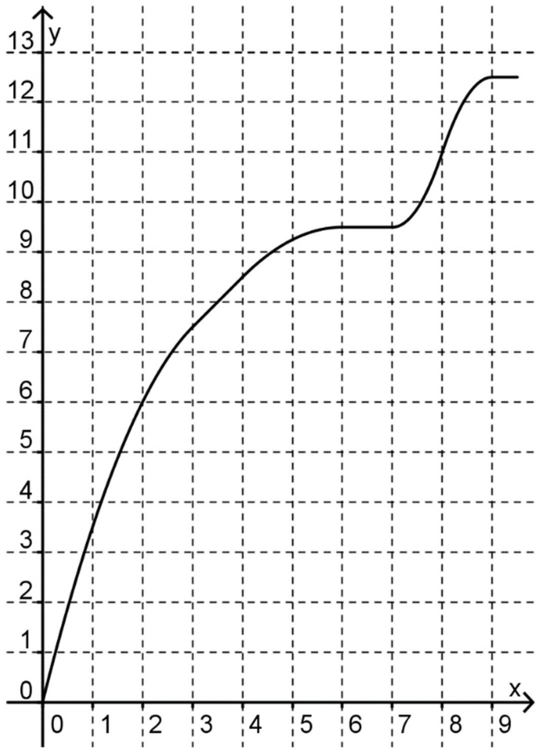
2. Flächenberechnungen

Ergebnisse

1) Flächenfunktion

Die Flächenfunktion besteht ausschliesslich aus Strecken und Parabelbogen.
Die Übergangspunkte sind (3 | 7.5), (4 | 8.5), (6 | 9.5), (7 | 9.5), (8 | 11) und (9 | 12.5)



2) Grundaufgaben

a) $\int_0^2 \left(\sqrt{x}+1\right)dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + x\Big|_0^2 = \frac{4}{3}\cdot\sqrt{2}+2$

b) $\int_{0.5}^{2.5} \left(\frac{1}{x}\right) dx = \ln(x)\Big|_{0.5}^{2.5} = \ln(2.5) - \ln(0.5) = \ln(5) = 1.609$

c) $\int_{-\sqrt{3}}^{1} \left(3-x^2\right)dx = 3x - \frac{1}{3}x^3\Big|_{-\sqrt{3}}^{1} = 2\cdot\sqrt{3}+\frac{8}{3}$

3) Technik des Integrierens

$$\int_1^3 \frac{3-\sqrt[3]{x}+3x}{x^3}\,dx = \int_1^3 \left(\frac{3}{x^3} - \frac{x^{1/3}}{x^3} + \frac{3}{x^2}\right)dx = \int_1^3 \left(3\cdot x^{-3} - x^{-8/3} + 3\cdot x^{-2}\right)dx =$$

$$= -\frac{3}{2}x^{-2} + \frac{3}{5}x^{-5/3} - 3\cdot x^{-1}\Big|_1^3 = \left(-\frac{1}{6} + \frac{3}{5}\cdot 3^{-5/3} - 1\right) - \left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{5} - 3\right) = \frac{1}{15}\cdot 3^{1/3} + \frac{41}{15} = 2.829$$

4) Ein Vergleich

a) F = 8/3.

b) $\int_{-2}^{1} \left(x^2-1\right)dx = 0$, weil die beiden Flächen unterhalb resp. oberhalb der x-Achse gleich gross sind.

5) Flächenverhältnis

11:16
[Die Gesamtfläche beträgt 18, die obere Teilfläche 22/3, die untere 32/3.]

6) Fläche

12 – 5·ln(5) resp. 3.953.

7) Parameter gesucht

$a = \pm 2.632$

[Setze $\int_0^a \left(a \cdot x^2 - x^3\right) dx = 4$]

8) Beweisaufgabe

Nullstellen $x = 0$ und $x = \sqrt{a}$ (weil $a > 0$). Schnittpunkte $x = 0$ und $x = \sqrt{\frac{a}{2}}$.

Gesamtfläche: $\int_0^{\sqrt{a}} \left(a \cdot x - x^3\right) dx = \frac{a^2}{4}$. Obere Teilfläche: $\int_0^{\sqrt{\frac{a}{2}}} \left(a \cdot x - x^3 - x^3\right) dx = \frac{a^2}{8}$

Somit ist die obere Teilfläche genau die Hälfte der Gesamtfläche. QED

9) Rampe

1 m^3

[Wähle S als Koordinatenursprung, dann hat die Parabel die Gleichung $y = \frac{1}{4} x^2$.]

10) Uneigentliche Integrale

a) $\frac{1}{18}$

b) Diese Fläche wird unendlich gross. Die Funktion geht zwar gegen Null, aber nicht genügend schnell. Die Werte täuschen! Wenn man von 0 bis 1000 integriert, dann beträgt die Fläche nur 13.82. Trotzdem kann die Fläche jede Grenze übersteigen, sofern man die obere Integrationsgrenze genügend hoch wählt.

11) Rotationskörper

a) $\frac{128}{3}\pi$ resp. 134.041

[Die Nullstelle ist an der Stelle $x = 16$.]

b) $\frac{162}{5}\pi$ resp. 101.788

[Die Nullstelle ist an der Stelle $x = 3$.]

12) Vorgegebenes Volumen

$t = 0.279$

[Setze $\pi \cdot \int_o^t \left(y(x)\right)^2 \, dx = 1$]

13) Bogenlänge

1.548

14) Beweisaufgabe

Lasse ein Trapez rotieren.

Die begrenzende Funktion hat die Gleichung $y = \frac{r_2 - r_1}{h} \cdot x + r_1$.

Wenn man alles in die Formel $V = \pi \cdot \int_o^h \left(y(x)\right)^2 \, dx$ einsetzt, erhält man das Ergebnis, welches in jeder Formelsammlung nachzulesen ist.