

Mathematik-Formelsammlung

Oliver Riesen, KSZ

Grundlagen

Quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{Diskriminante: } D = b^2 - 4ac$$

Logarithmen

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x \quad \ln x = \log_e x \quad e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.71828\dots$$

Planimetrie

Rechtwinkliges Dreieck	Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$ Satz des Euklid: $a^2 = pc$ und $b^2 = qc$ Höhensatz: $h^2 = pq$
Gleichseitiges Dreieck	$A = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ $h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$
Quadrat	$A = a^2$ $d = a\sqrt{2}$
Trapez	$A = \frac{a+c}{2} h = mh$
Kreis	$u = 2\pi r$ $A = \pi r^2$
Bogen und Sektor	$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{b}{2\pi r} = \frac{A}{\pi r^2}$

Stereometrie

Würfel	$V = a^3$ $A = 6a^2$
Quader	$V = abc$ $A = 2(ab + ac + bc)$
Prisma	$V = Gh$
Pyramide	$V = \frac{1}{3} Gh$
Zylinder	$V = Gh = \pi r^2 h$ $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ $M = 2\pi rh$
Kegel	$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ $M = \pi rs$
Kugel	$V = \frac{4}{3} \pi r^3$ $A = 4\pi r^2$

Trigonometrie

Rechtwinkliges Dreieck	$\sin \rightarrow \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ $\cos \rightarrow \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$ $\tan \rightarrow \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$
Beliebige Winkel	$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
Beliebiges Dreieck	Sinus-Satz: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r$ (r = Umkreisradius) Cosinus-Satz: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$ und zyklisch vertauscht.

Analysis

Folgen und Reihen

Arithmetische Folge	$a_{n+1} - a_n = d$ $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ $s_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$
Geometrische Folge	$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ $s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a_1}{1-q}$ (wenn $ q < 1$)

Differentialrechnung

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Konstanter Faktor: $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$ Summen: $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$ Kettenregel: $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Produktregel: $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ Quotientenregel: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

Integralrechnung

Konstanter Faktor: $\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx$ Summen: $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

Partielle Integration: $\int (f'(x) \cdot g(x)) dx = f(x) \cdot g(x) - \int (f(x) \cdot g'(x)) dx$

Integration durch Substitution: $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du$, $u = g(x)$

Bestimmtes Integral: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, wobei $F'(x) = f(x)$

Rotationskörper: $V = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} (f(x))^2 dx$ bei Rotation um die x-Achse

Bogenlänge: $b = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

Vektorgeometrie

Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{Norm } \|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\gamma) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$. Es gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

Vektorprodukt: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = -\vec{b} \times \vec{a}$

Es gilt: $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$ und $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

Ebene Vektorgeometrie (analytische Geometrie)

Abstand der Punkte $P(p_1 | p_2)$ und $Q(q_1 | q_2)$: $\|\overline{PQ}\| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}$

Geradengleichungen:

Parametergleichung:	Koordinatengleichung:	Normalform:	Achsenabschnittsform:
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$	$ax + by + c = 0$	$y = m \cdot x + v$	$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = 1$

Steigung und Steigungswinkel: $m = \tan(\alpha) = \frac{r_2}{r_1}$

Zwischenwinkel ε zweier Geraden mit Steigungen m_1 und m_2 : $\tan(\varepsilon) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$

Senkrecht stehende Geraden mit Steigungen m_1 und m_2 : $(\varepsilon = 90^\circ) \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$

Kreis mit Zentrum $M(m_1 | m_2)$ und Radius r : $(x - m_1)^2 + (y - m_2)^2 = r^2$

Vektorgeometrie im Raum

Koordinaten eines Punktes P, Ortsvektor zum Punkt P: $P(p_1 | p_2 | p_3) \Rightarrow \vec{OP} = \vec{r}_P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$

Parametergleichung einer Geraden:	Parametergleichung einer Ebene:	Koordinatengleichung einer Ebene: Hesse'sche Normalform:
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$	$\varepsilon: ax + by + cz + d = 0$ $\varepsilon: \frac{ax + by + cz + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0 \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Abstand zweier Punkte P und Q:	Winkel α zwischen einer Geraden und einer Ebene:	Winkel ε zwischen zwei Ebenen:
$\ \vec{PQ}\ = \ \vec{r}_Q - \vec{r}_P\ $	$\cos(\beta) = \frac{\vec{r}_g \cdot \vec{n}_\varepsilon}{\ \vec{r}_g\ \cdot \ \vec{n}_\varepsilon\ }$ und $\alpha = 90^\circ - \beta$	$\cos(\varepsilon) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\ \vec{n}_1\ \cdot \ \vec{n}_2\ }$

Kugel mit Zentrum $M(m_1 | m_2 | m_3)$ und Radius r : $(x - m_1)^2 + (y - m_2)^2 + (z - m_3)^2 = r^2$

Stochastik

Kombinatorik

	ohne Wiederholung	mit Wiederholung
geordnete Stichproben	$\frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten	n^k Möglichkeiten
ungeordnete Stichproben	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ Möglichkeiten	$\binom{n+k-1}{k}$ Möglichkeiten
Permutationen	$n!$ Möglichkeiten	$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$ Möglichkeiten

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Additionssatz: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Bedingte Wahrscheinlichkeit: $P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

A, B sind unabhängig $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow P(A | B) = P(A)$

Zufallsgrößen

Erwartungswert: $E(X) = \mu = \sum_{i=1}^m x_i \cdot p(x_i)$ Varianz: $V(X) = \sum_{i=1}^m (x_i - E(X))^2 \cdot p(x_i) = \sigma^2$

Binomialverteilung (Ziehen mit Zurücklegen)

n Versuche mit Trefferwahrscheinlichkeit p. $P_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ $\mu = n \cdot p$
 $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

Hypergeometrische Verteilung (Ziehen ohne Zurücklegen)

m Kugeln, davon w weisse. n Ziehungen. $P_n^*(k) = \frac{\binom{w}{k} \cdot \binom{m-w}{n-k}}{\binom{m}{n}}$

Normalverteilte Zufallsgrösse mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ :

$P(X \leq x) = \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, wobei $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$

Tabelle der standardisierten Normalverteilung

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936