

3. Kongruenzsätze und Grundkonstruktionen

3.1. Dreiecke aus drei Seitenlängen

1) Bemerkung

Von den drei Seiten und drei Winkeln eines Dreiecks sind jeweils drei Größen vorgegeben. Diese bestimmen die Gestalt des zugehörigen Dreiecks. Wir konstruieren das Dreieck und überlegen uns, wie viele Lösungen es geben kann.

2) Grundkonstruktion

Konstruiere ein Dreieck mit $a = 5 \text{ cm}$, $b = 7 \text{ cm}$, $c = 8 \text{ cm}$

Lösungsweg:

Wir stellen fest:

.....

.....

3) Satz

.....

.....

.....

.....

4) Überlegungsaufgabe

Gibt es zu drei vorgegebenen Seitenlängen immer ein Dreieck?

.....

.....

.....

3.2. Dreiecke aus zwei Winkeln und einer Seitenlänge

1) Bemerkung

Da die Innenwinkelsumme im Dreieck 180° beträgt, kann man mit zwei vorgegebenen Winkeln den dritten immer ausrechnen. Da wir das Dreieck aber mit den vorgegebenen Winkeln konstruieren wollen, gibt es zwei grundlegend verschiedene Möglichkeiten

2) Grundkonstruktion

Konstruiere ein Dreieck mit $c = 7 \text{ cm}$, $\alpha = 35^\circ$, $\beta = 65^\circ$.

Lösungsweg:

3) Satz

(1. Version)

.....

.....

.....

(2. Version)

.....

.....

.....

4) Überlegungsaufgabe

Hat WSW immer eine Lösung?

.....

.....

.....

5) Grundkonstruktion

Konstruiere ein Dreieck mit $c = 5 \text{ cm}$, $\beta = 55^\circ$, $\gamma = 75^\circ$.

Lösungsweg:

6) Satz

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7) Überlegungsaufgabe

Hat SWW immer eine Lösung?

.....

.....

8) Freiwillige Übung

Von einem Dreieck kennt man eine Seite 5 cm und zwei Winkel, nämlich 40° und 65° .
Konstruiere das Dreieck ...

- ... wenn die beiden Winkel der gegebenen Seite anliegen.
- ... wenn der 65° -Winkel der gegebenen Seite gegenüberliegt.

3.3. Dreiecke aus zwei Seitenlängen und einem Winkel

1) Bemerkung

Wie im vorigen Kapitel gibt es auch hier wieder zwei grundlegend verschiedene Möglichkeiten. Da zwischen den Seitenlängen keine direkte Beziehung besteht (so wie sie für die Winkel mit Summe 180° gilt), sind die Möglichkeiten wirklich entscheidend unterschiedlich.

Man überlege sich, wie die Kürzel lauten können:

2) Grundkonstruktion

Konstruiere ein Dreieck mit $b = 5 \text{ cm}$, $c = 8 \text{ cm}$, $\alpha = 40^\circ$.

Lösungsweg:

3) Satz

(1. Version)

.....

.....

.....

(2. Version)

.....

.....

.....

4) Überlegungsaufgabe

Hat SWS immer eine Lösung?

.....

.....

5) Vorbereitung für SSW

Welche Daten kann man für den Fall SSW vorgeben? Finde alle Möglichkeiten

.....

6) Konstruktionen

a) Konstruiere ein Dreieck mit $c = 6 \text{ cm}$, $a = 4 \text{ cm}$, $\alpha = 55^\circ$.

Lösungsweg:

Wir stellen fest:

Wir müssen also die Vorgaben günstiger angeben. Dazu gibt es zwei Möglichkeiten:

.....

b) Konstruiere ein Dreieck mit $c = 6 \text{ cm}$, $a = 4 \text{ cm}$, $\alpha = 30^\circ$.

Lösungsweg:

Wir stellen fest:

.....

c) Konstruiere ein Dreieck mit $c = 5 \text{ cm}$, $a = 6 \text{ cm}$, $\alpha = 55^\circ$.

Lösungsweg:

Wir stellen fest:

.....

Worin besteht der Unterschied bei Vorgabe c) gegenüber den anderen Fällen?

.....

.....

.....

7) Satz

.....

.....

.....

.....

.....

8) Überlegungsaufgabe

Hat S_{sw} resp. SSW_g immer eine Lösung?

.....

.....

.....

9) Überlegungsaufgabe

Weshalb gibt es keinen Kongruenzsatz WWW?

.....

.....

.....

10) Überbestimmte und unterbestimmte Aufgaben

Normalerweise erwartet man bei einer Aufgabe genau die richtige Anzahl Vorgaben, damit die Aufgabe lösbar wird.

Es kann aber sein, dass eine (oder mehrere) Vorgaben überflüssig sind. Wenn man dann zu wenig Vorgaben hat, wird die Aufgabe unlösbar. Der Mathematiker spricht von einer unterbestimmten Aufgabe.

Entsprechend ist eine Aufgabe überbestimmt, wenn zu viele Angaben vorhanden sind. Es kann dann sein, dass es trotzdem eine Lösung gibt, aber das ist nicht sicher.

Dazu folgendes Beispiel: Von einem Dreieck weiss man, dass $a = 4$ cm, $b = 4$ cm, $c = 4$ cm und $\alpha = 60^\circ$. Das sind 4 Angaben, aber es gibt trotzdem eine Lösung, nämlich ein gleichseitiges Dreieck mit 4 cm Seitenlänge. Wenn aber ein anderer Winkel, beispielsweise $\beta = 61^\circ$ vorgegeben wird, dann gibt es kein passendes Dreieck.

11) Freiwillige Übung

Mit der folgenden Aufgabe erhält man alle möglichen Fälle von SSW in einer Figur.

Von einem Dreieck kennt man $c = 8$ cm und $\alpha = 30^\circ$.

- $a = 3$ cm. Wie viele Lösungsdreiecke gibt es?
- $a = 4$ cm.
- $a = 6$ cm.
- $a = 9$ cm.