

## 2. Spezielle Linien und Punkte

### 2.1. Mittelsenkrechte

1) **Überlegungsaufgabe**

Eine Strecke sei vorgegeben. Welche Eigenschaften haben alle Punkte auf der Mittelsenkrechten dieser Strecke?

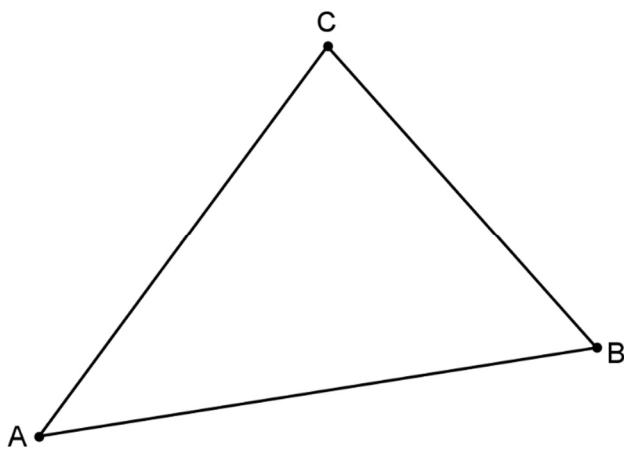
.....  
 .....

2) **Beispiel**

Für das ganze Kapitel verwenden wir das gleiche Dreieck ( $a = 5, b = 6, c = 7$ ).

Konstruiere die drei Mittelsenkrechten.

Nach der Konstruktion sollte sich eine Vermutung ergeben.



3) **Satz**

.....  
 .....

Zusatz .....

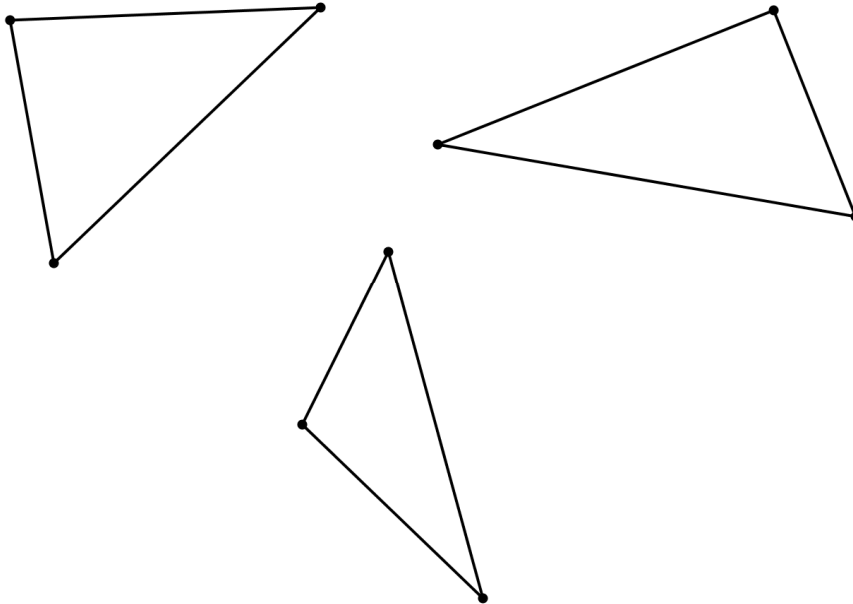
.....

4) **Beweis**

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

**5) Überlegungsaufgabe**

Wir betrachten ein spitzwinkliges, rechtwinkliges resp. stumpfwinkliges Dreieck und bestimmen das Umkreiszentrum. Wo liegt es?



Wir stellen fest:

- a) .....
- .....
- .....
- b) .....
- .....
- .....
- c) .....
- .....
- .....
- .....

**6) Freiwillige Übung**

Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck, von dem die Basis 6 cm und die Schenkel 9 cm lang sind. Konstruiere das Umkreiszentrum.

### 3.2. Winkelhalbierende

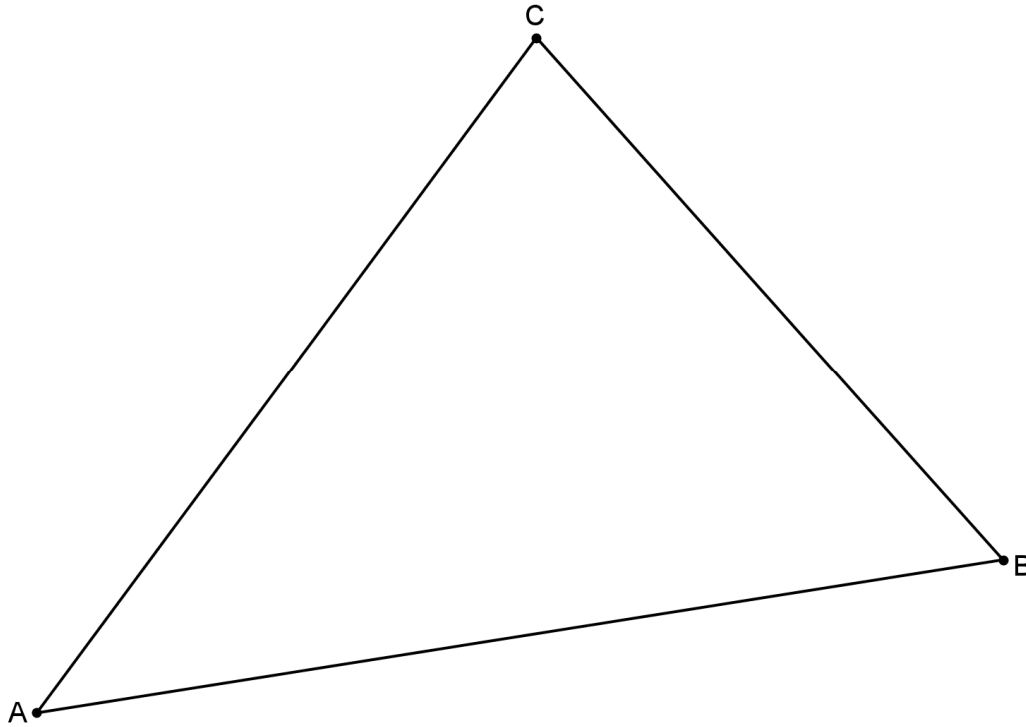
1) **Überlegungsaufgabe**

Welche Eigenschaft haben alle Punkte auf der Winkelhalbierenden eines Winkels?

.....  
.....

2) **Beispiel**

Konstruiere die drei Winkelhalbierenden der Innenwinkel. Was vermutest du?



3) **Satz**

.....  
.....

Zusatz .....

.....

4) **Beweis**

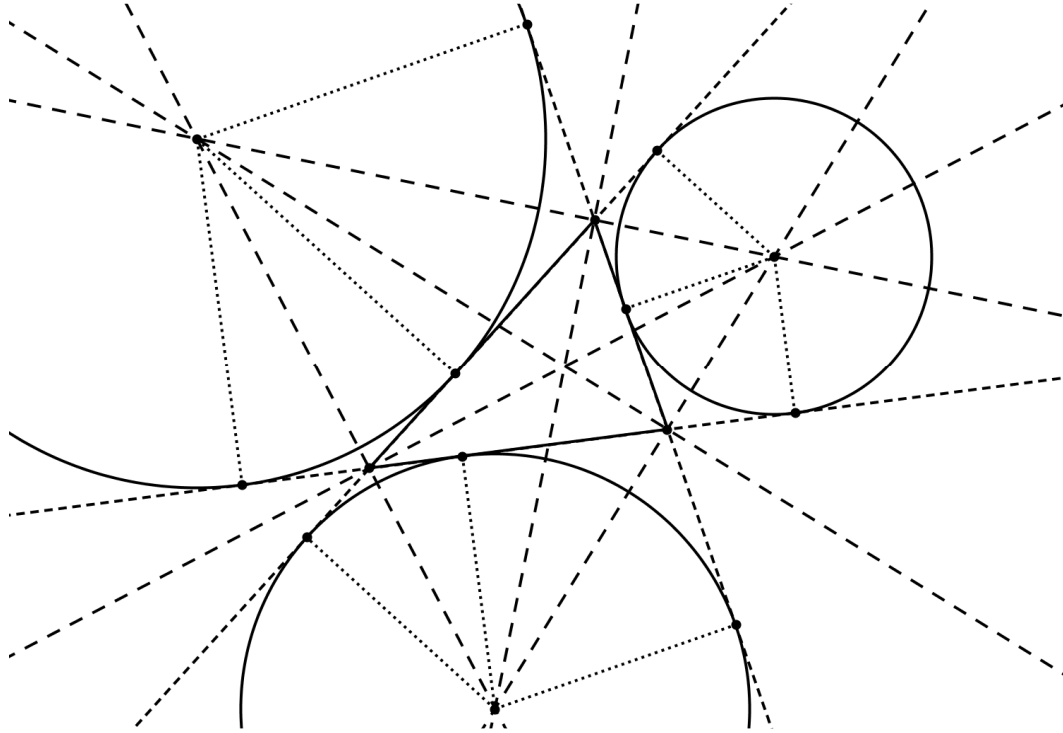
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

5) **Konstruktion**

Konstruiere die Berührradien vom Inkreiszentrum auf die Dreiecksseiten.

**6) Ankreise**

Wenn man die Seiten eines Dreiecks verlängert, dann kann man auch die Aussenwinkel halbieren. Das ergibt drei zusätzliche Schnittpunkte. Die so entstehenden drei Ankreise berühren dann eine Dreiecksseite und die beiden anderen in der Verlängerung.



---

**7) Freiwillige Übung**

Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck mit Kathetenlängen  $a = 4$  cm,  $b = 5$  cm.  
Konstruiere den Ankreis an die Hypotenuse.

### 2.3. Die Höhen eines Dreiecks

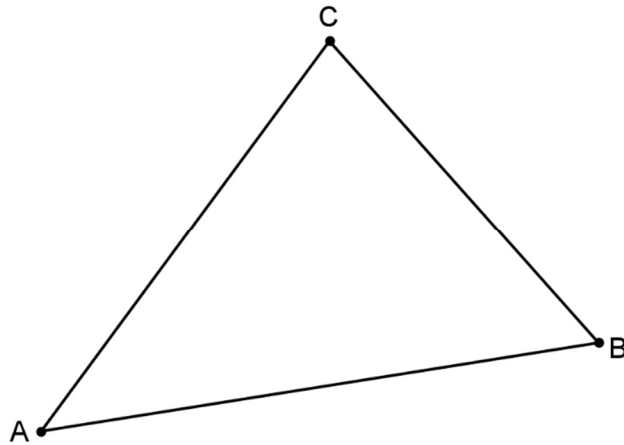
**1) Überlegungsaufgabe**

Was versteht man (mathematisch) unter einer Höhe (eines Schrankes, eines Turms, ...)?

.....  
 .....

**2) Beispiel**

Konstruiere die drei Lote von den Eckpunkten auf die gegenüberliegende Seite.



**3) Satz**

.....  
 .....

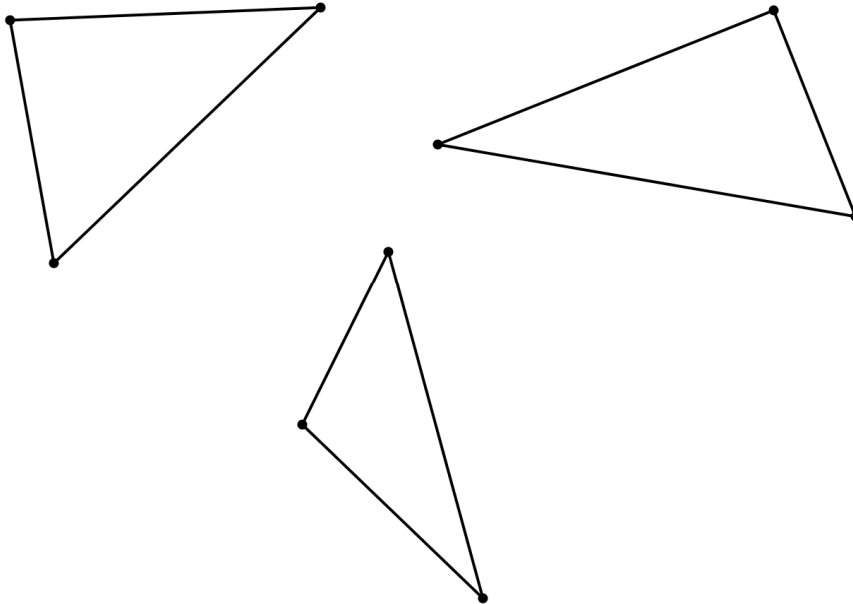
**4) Beweis**

Mit dem folgenden Text sollst du den Beweis als Übung selber durchführen.  
 Zeichne ein Dreieck ABC (aber nicht ein allzu grosses – Seitenlängen maximal 4 cm – und wenn möglich ein spitzwinkliges, aber klar kein gleichseitiges).  
 Konstruiere in diesem Dreieck ABC die drei Höhen  $h_a$ ,  $h_b$  und  $h_c$ .  
 Konstruiere dann die Parallele zu jeder Seite durch die gegenüber liegende Ecke. So entsteht ein neues, grösseres Dreieck. Die Eckpunkte kannst du mit P, Q und R beschriften.  
 Wenn du genau gezeichnet hast, dann müsstest du einsehen, welche Bedeutung  $h_a$ ,  $h_b$  und  $h_c$  im Dreieck PQR haben. Weshalb schneiden sich diese Linien in einem Punkt?

.....  
 .....

**5) Überlegungsaufgabe**

Wo liegt der Höhenschnittpunkt bei einem spitzwinkligen, rechtwinkligen resp. stumpfwinkligen Dreieck?



Wir stellen fest:

- a) .....
- .....
- .....
- b) .....
- .....
- .....
- c) .....
- .....
- .....
- .....

**6) Freiwillige Übung**

Zeichne ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 7 cm und konstruiere das Umkreiszentrum und den Höhenschnittpunkt. (Studieren geht über Probieren!)

## 2.4. Seitenhalbierende oder Schwerelinien

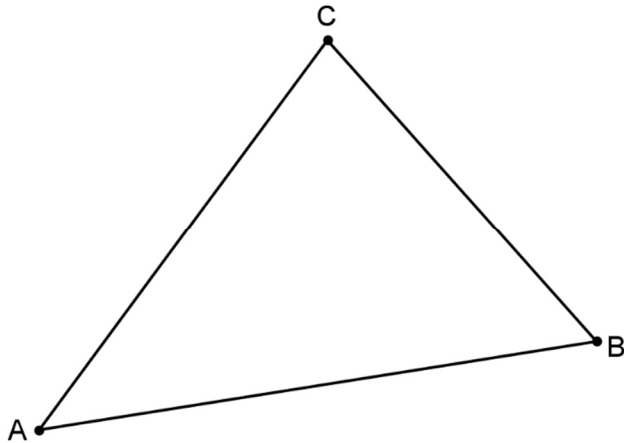
### 1) Überlegungsaufgabe

Lege ein Geo-Dreieck so auf einen Bleistift, dass eine Ecke mit einem  $45^\circ$ -Winkel auf dem Bleistift liegt. Was stellst du fest?

.....  
 .....

### 2) Beispiel

Konstruiere die Strecken von den Eckpunkten auf die Mitte der gegenüberliegenden Seite.



.....  
 .....

### 3) Satz

.....  
 .....

### 4) Bemerkung

Die Begriffe Seitenhalbierende und Schwerelinie werden beide verwendet.

### 5) Forschungsaufgabe

Zeichne ein beliebiges Dreieck und darin die drei Schwerelinien. Mit dem Schwerpunkt entstehen auf jeder Schwerelinie zwei Teilstrecken. Miss die Längen aller Teilstrecken. Was vermutest du?

**6) Satz**

.....

.....

.....

.....

**7) Beweis**

.....

.....

.....

.....

.....

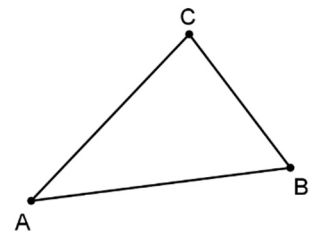
.....

.....

.....

.....

.....



**8) Freiwillige Übung**

Zeichne in einer grossen Figur – Platzbedarf: eine ganze A4-Seite – alle speziellen Linien (Mittelsenkrechten, Winkelhalbierenden, Höhen und Schwerelinien) ein.

[Hinweis zur Figur: Wenn die Winkel des Dreiecks ungefähr  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  und  $75^\circ$  betragen, dann kann man alle Sonderfälle verhindern und die Lage wird gut ersichtlich.]

Wenn man genau zeichnet, erkennt man, dass drei von den vier entstehenden speziellen Punkten (Umkreiszentrum, Inkreiszentrum, Höhenschnittpunkt und Schwerpunkt) auf einer Geraden liegen.

Diese Gerade heisst Euler'sche Gerade, benannt nach dem Schweizer Mathematiker Leonhard Euler.