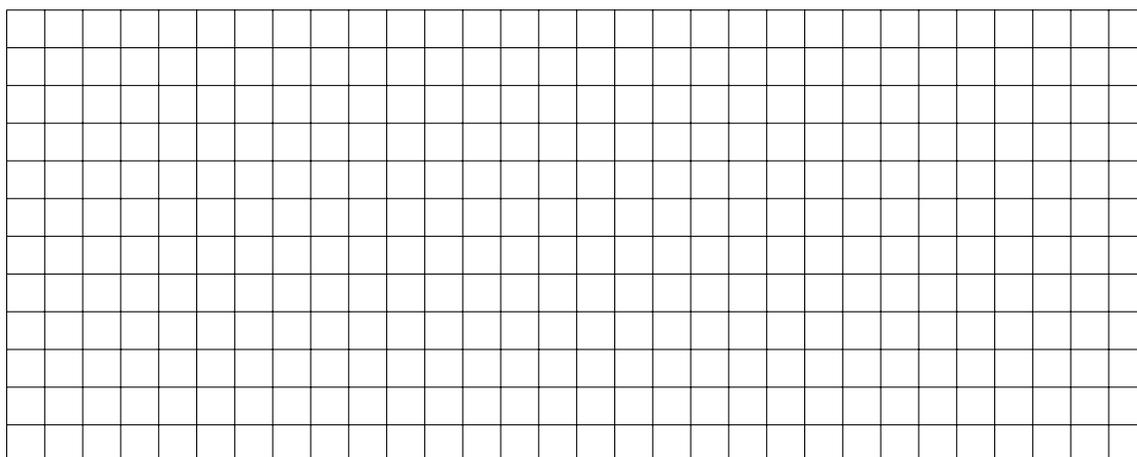
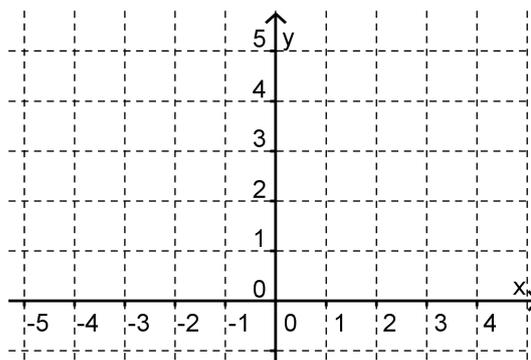
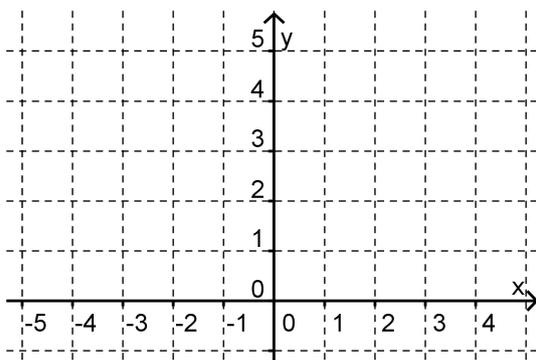


## 7. Verschiedene Funktionen

### 7.1. Exponentialfunktionen

#### 1. Eine Differentialgleichung: $y'(x) = y(x)$

Wir suchen eine Funktion, aber nicht  $y = 0$ , die mit ihrer Ableitung übereinstimmt. Folglich suchen wir eine Funktion, für die stets der Funktionswert und die Steigung im betreffenden Punkt gleich sind.



#### 2. Definition

Die Zahl  $e$  ist die Eulersche Zahl.

Es gibt mehrere Möglichkeiten,  $e$  zu definieren. Eine davon ist  $e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .

Der numerische Wert ist etwa  $e = 2.718281828\dots$

Die Funktion  $y = f(x) = e^x$  ist die (natürliche) Exponentialfunktion.

#### 3. Satz

Für die Funktion  $y = f(x) = e^x$  gilt  $y' = f'(x) = e^x$ .

Die Herleitung der Zahl  $e$  sowie der Beweis des Satzes erfordert einige Rechnung.

4. **Technik des Differenzierens**

Bestimme die Ableitung der folgenden Funktionen:

a)  $y = f(x) = e^{4x}$  .....

Praktische Bedeutung: Bevölkerungsexplosion, Zins und Zinseszins.

b)  $y = f(x) = e^{-x}$  .....

Praktische Bedeutung: Exponentielle Abnahme, Radioaktivität.

c)  $y = f(x) = e^{-x} \cdot \sin(x)$  .....

Praktische Bedeutung: Gedämpfte oder abklingende Schwingung.

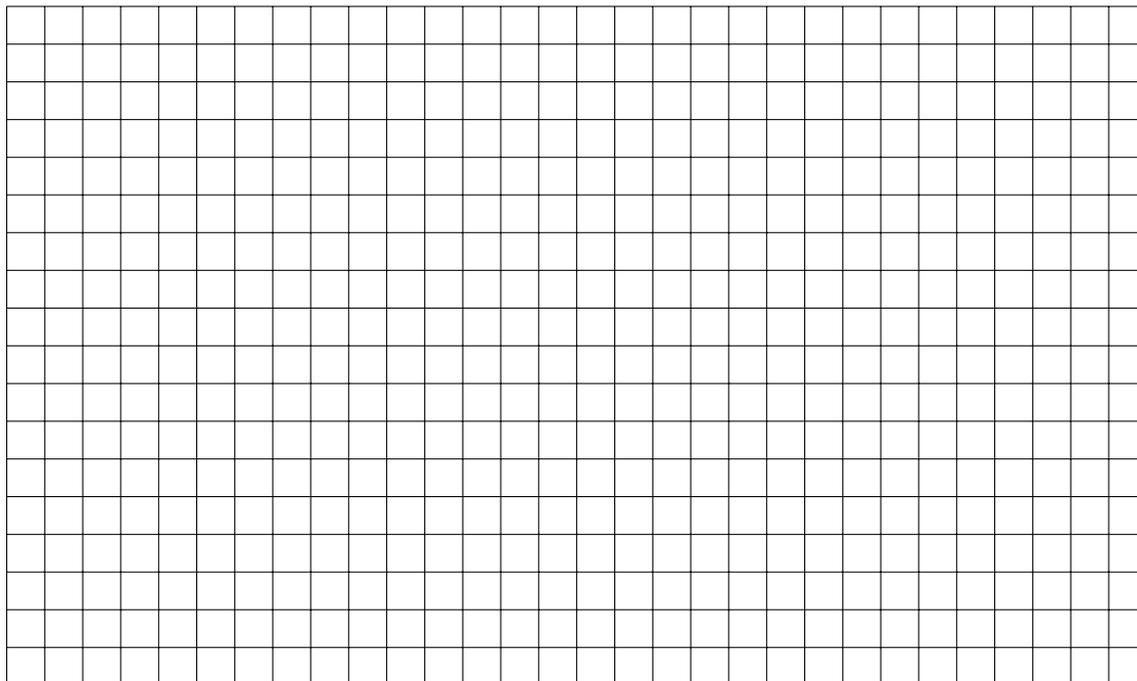
d)  $y = f(x) = 3e^{2x} + 4e^x + e^{-3x}$  .....

Praktische Bedeutung: Überlagerung.

**Übungen**  
 Leite zweimal ab:  $y = f(x) = x^3 \cdot e^x$   
 Ebenso:  $y = f(x) = e^{-x^2}$

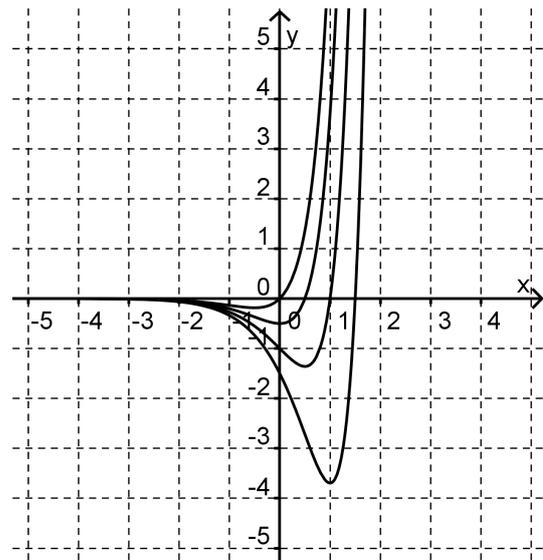
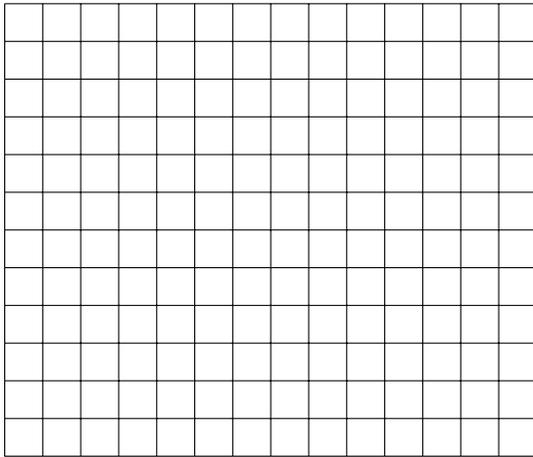
5. **Kurvendiskussion**

Die in der Statistik wichtige Gauss'sche Glockenkurve hat im Wesentlichen die Form  $y = f(x) = e^{-x^2}$ . Führe eine Kurvendiskussion durch.



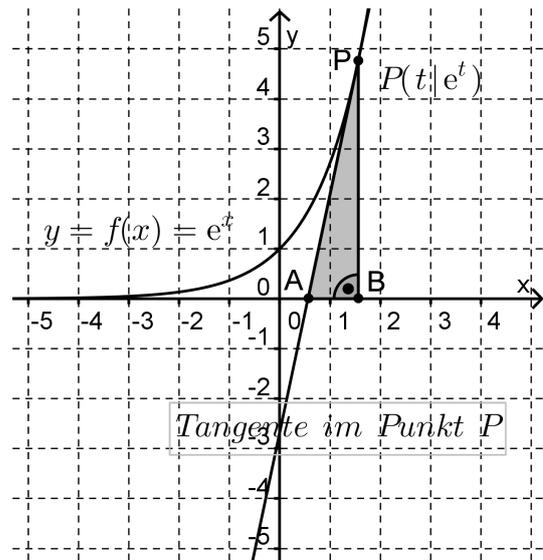
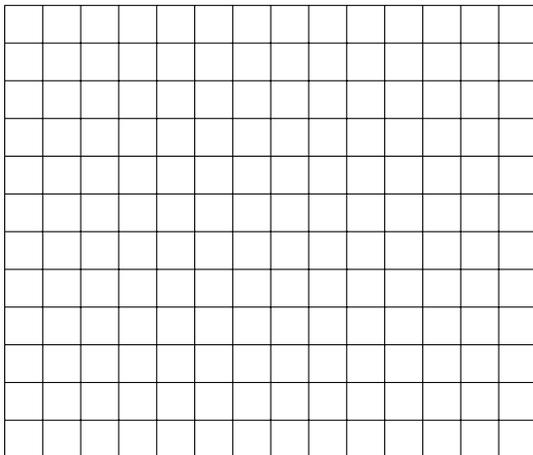
6. Kurvenschar

Gegeben ist  $y = f_t(x) = (x - t) \cdot e^{2x}$ .  
 Die Minima aller dieser Kurven liegen auf einer weiteren Kurve.  
 Bestimme deren Gleichung.



7. Anwendung

Betrachte die Figur. Wie lang ist  $AB$ ,  
 abhängig von  $t$ ?



**Übungen**

Diese Beispiele dienen zur Repetition.

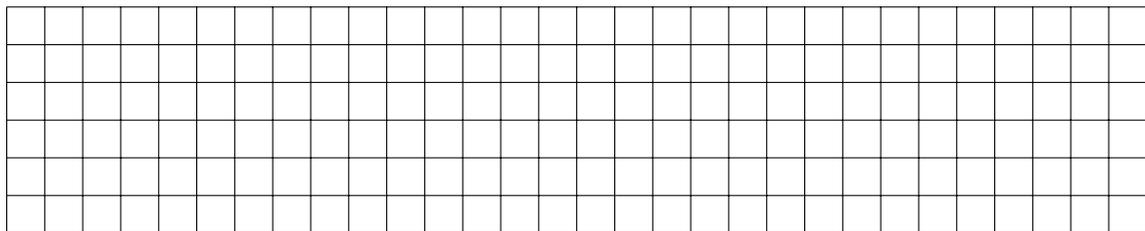
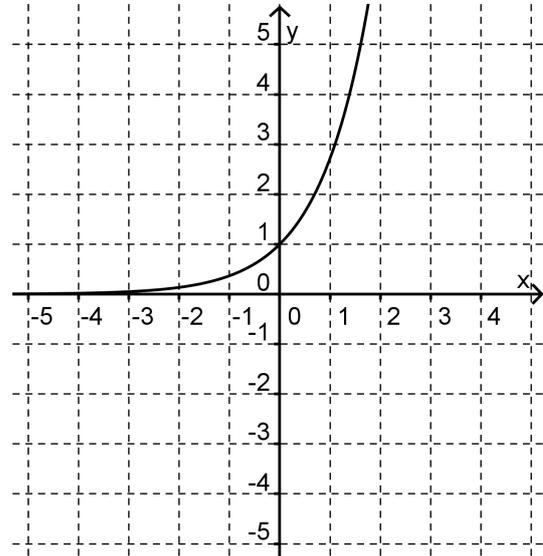
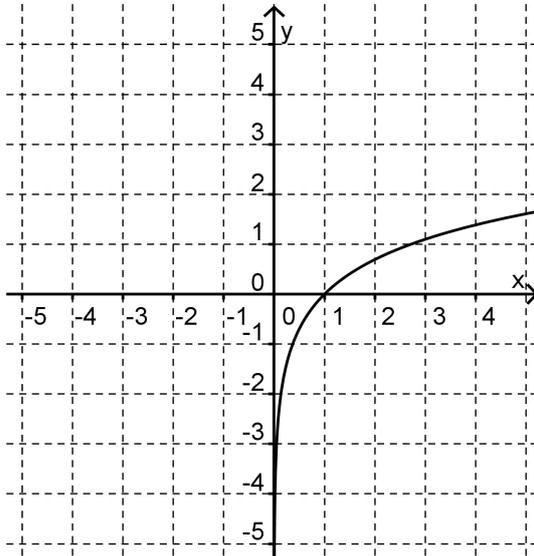
- a) Bestimme den Schnittwinkel der Kurven  $y = f(x) = e^x$  und  $y = f(x) = e^{2x-1}$ .
- b) Welcher Punkt auf  $y = f(x) = e^x$  hat zur Geraden  $y = 2x$  kleinsten Abstand?
- c) Welcher Punkt auf  $y = f(x) = e^x$  hat zum Punkt  $P(0|0)$  kleinsten Abstand?



## 7.2. Die natürliche Logarithmusfunktion

### 1. Ableiten von $\ln(x)$

Wir beweisen, dass  $[\ln(x)]' = \frac{1}{x}$ .



### 2. Technik des Differenzierens

Leite ab:

a)  $y = x^4 \cdot \ln(x)$  .....

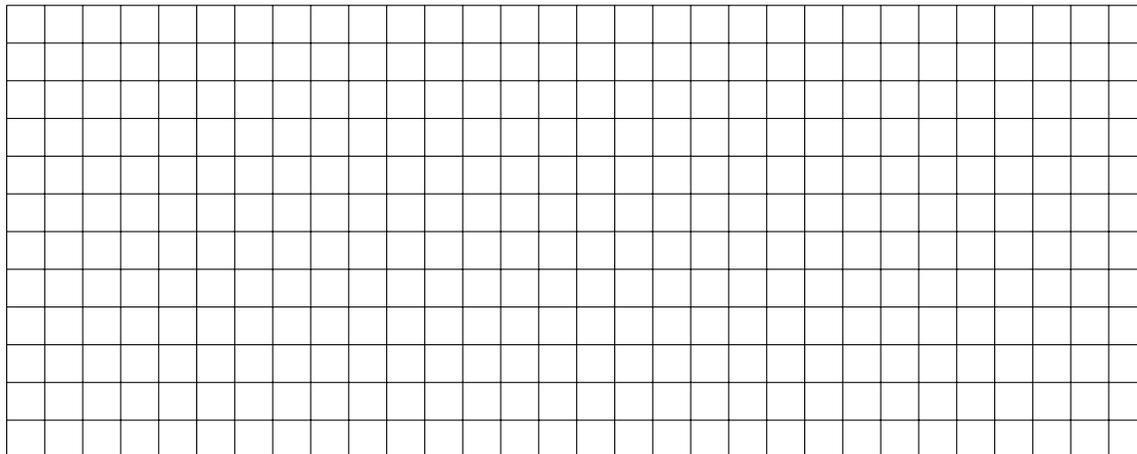
b)  $y = \ln(x^2 + 4)$  .....

c)  $y = \frac{\ln(x)}{x^2}$  .....

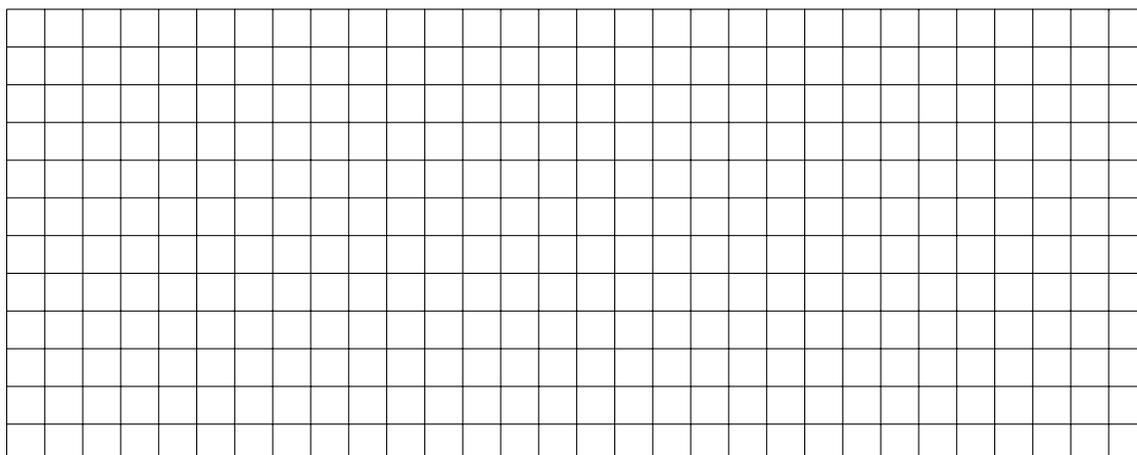
**Zusatz**  
 Bestimme von den obigen Beispielen  $y = x^4 \cdot \ln(x)$  und  $y = \ln(x^2 + 4)$  auch noch die zweite Ableitung.

**3. Kurvendiskussion**

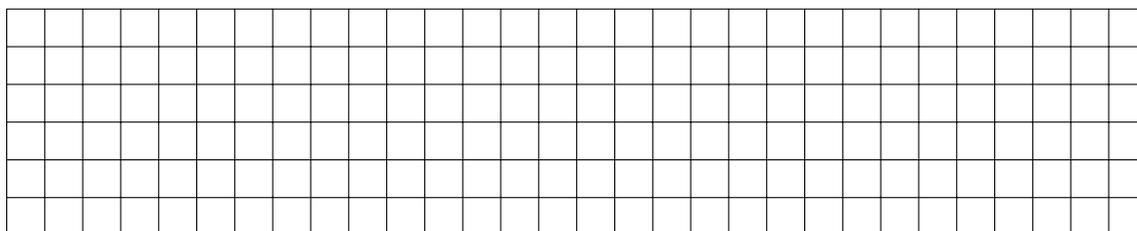
$$y = \ln(x^2 + 4)$$

**4. Kurvendiskussion**

$$y = x^3 \cdot \ln(x)$$

**5. Kurventangente**

Welche Tangente an die Kurve  $y = \ln(x)$  geht durch den Punkt  $(0 | 5)$  ?  
Bestimme auch die Koordinaten des Berührungspunkts.

**Aus einer Maturprüfung**

$$y = \ln(x^2 + t).$$

Für welchen Wert von  $t$  gehen die Wendetangenten durch den Koordinatenursprung?

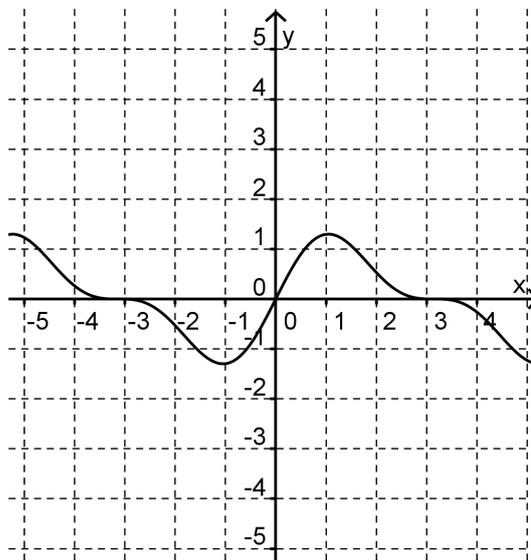
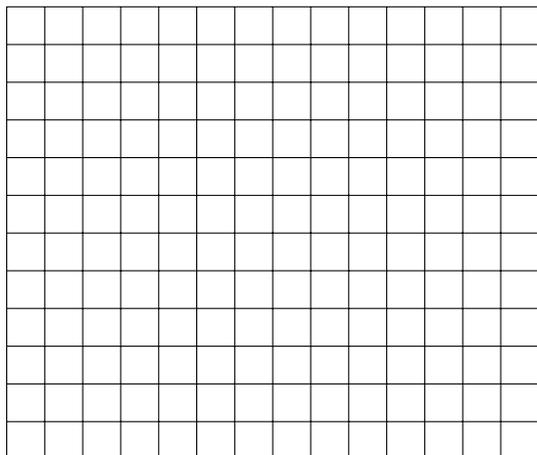
### 7.3. Trigonometrische Funktionen

1. **Bemerkung**

Die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen wurden in früheren Kapiteln hergeleitet oder begründet.

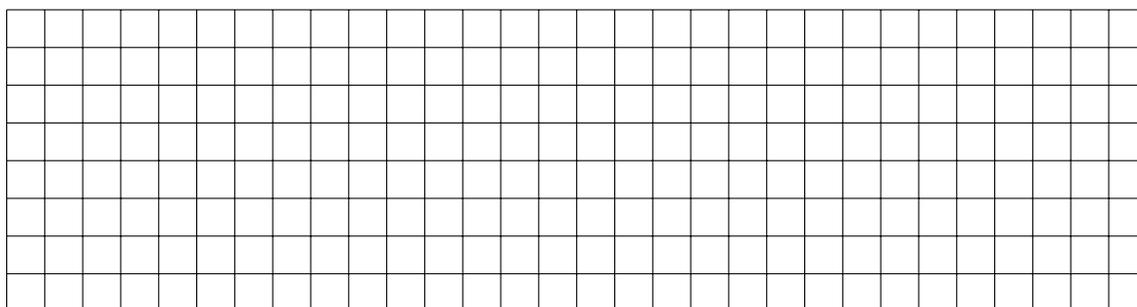
2. **Kurvendiskussion**

$$y = f(x) = \sin(x) + \frac{1}{2} \cdot \sin(2x)$$



3. **Schnittwinkel**

Beweise, dass sich die Kurven  $y = \cos(x)$  und  $y = \tan(x)$  rechtwinklig schneiden.



4. **Extremalwertaufgabe**

Aus vier Brettern von je 10cm Breite soll ein Kanal mit möglichst grossem Fassungsvermögen gebaut werden, wobei zwei Bretter senkrecht stehen sollen.

Die mathematische Version dieser Aufgabe lautet: Wie gross muss der eingezeichnete Winkel sein, damit die Figur möglichst grosse Fläche hat?

