6. Funktionen verknüpfen, Kettenregel

6.1. Technik des Differenzierens

1. **Verknüpfen von Funktionen**

   Wir führen zwei Funktionen hintereinander aus. Der Mathematiker nennt das Verknüpfen oder Verschachteln von Funktionen.

   Wenn wir $f(g(x))$ schreiben, dann wird zuerst $g(x)$ ausgeführt. Das Ergebnis bezeichnen wir mit u. Erst dann wird $f(u)$ ausgeführt.
   $g(x)$ ist die innere Funktion, $f(u)$ die äussere Funktion.

2. **Musterbeispiel**

   Gegeben sind die Funktionen $f(x) = 1 - x^2$, $g(x) = \cos(x)$ und $h(x) = \dfrac{1}{x}$.
   Bestimme die Funktionsgleichungen der folgenden Verknüpfungen.

   a) $f(g(x)) =$ ....

   b) $g(f(x)) =$ ....

   c) $g(h(x)) =$ ....

   d) $h(g(x)) =$ ....

   e) $f(g(h(x))) =$ ....

3. **Ableiten verknüpfter Funktionen**

   Gegeben sind die Funktionen $y = f(u)$ und $u = g(x)$. Wir leiten $y' = \Big(f(g(x))\Big)'$ her.

4. **Hyperbel**
$y = f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$.
Die durch diese Gleichung beschriebene Kurve ist ein Hyperbelbogen. Der Querschnitt eines AKW-Kühlturms besteht aus zwei Hyperbelbogen.

5. **Musik**
$y = f(x) = \sin(4x)$.
Wenn die Frequenz einer Schwingung vervierfacht wird, dann wird der erzeugte Ton um zwei Oktaven höher.

6. **Synthesizer**
$y = f(x) = \sin(x) + \frac{1}{2} \cdot \sin(2x)$.
Das ist eine Überlagerung von zwei Schwingungen.

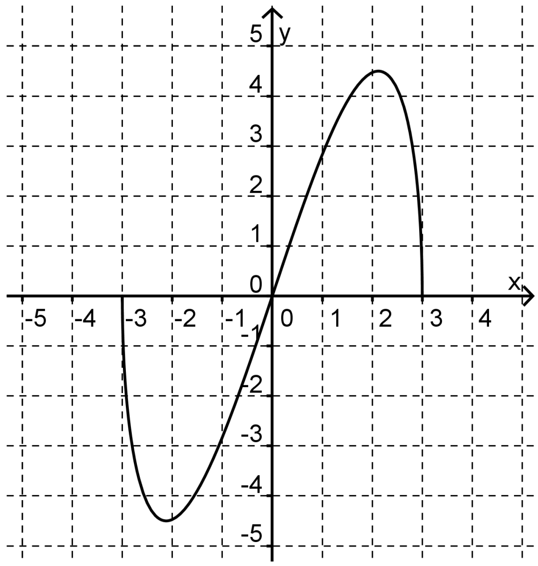
7. **Technik des Differenzierens**
a) $y = \left(x^2 + \sqrt{x}\right)^4$ ....
b) $y = \sqrt{2 + \sin(3x - \pi)}$..
c) $y = \left(3 \cdot \cos(3x^3 - 3\pi)\right)^3$ ....

Zusatzaufgabe
$y = f(x) = \sqrt[3]{4 - x^3}$. Leite zweimal ab.

6.2. Anwendungen

1. **Kurvendiskussion**

   $y = f(x) = x \cdot \sqrt{9 - x^2}$.

   a) Definitionsbereich ....

   ....

   b) Symmetrie........................

   ....

   c) Nullstellen........................

   ....

   d) Polstellen, Asymptoten ....

   ....

   ....

   e) Maxima und Minima..

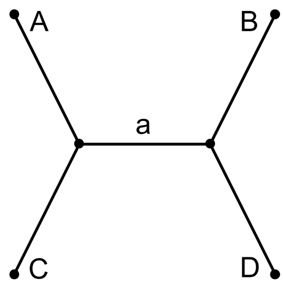
   ....

   f) Wendepunkte ....

   ....

   ....

2. **Minimale Streckenlängen**

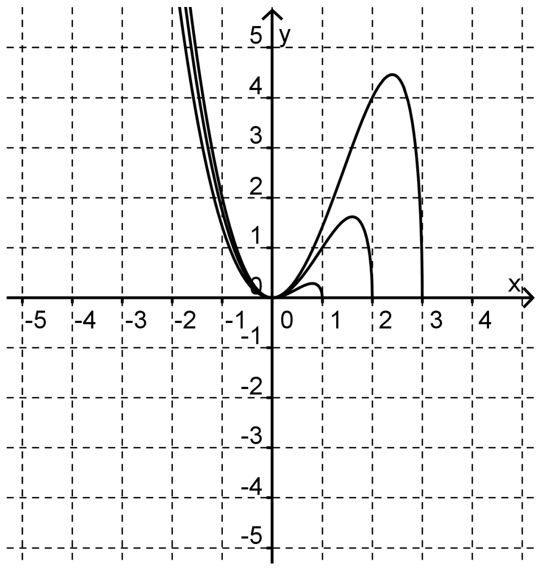
   (Siehe die Figur) Die vier Eckpunkte eines Quadrats $ABCD$ mit 10 cm Seitenlänge sollen durch einen Streckenzug wie in der Figur verbunden werden.
   Wie gross ist a, wenn der gesamte Streckenzug möglichst kurz sein soll?
   Die praktische Anwendung dieser Aufgabe lautet etwa so: Wie verbindet man 4 Punkte an den Eckpunkten eines Quadrats mit möglichst wenig Kabel?

3. **Maximale Querschnittsfläche**

Eine oben offene Rinne soll aus drei Brettern gleicher Breite hergestellt werden. Wie muss die Rinne beschaffen sein, damit sie möglichst grosses Fassungsvermögen hat? Die mathematische Version dieser Aufgabe lautet: Welches gleichschenklige Trapez mit drei gleichlangen Seiten hat maximale Fläche?

4. **Kurve aller Maxima**

Für $t > 0$ ist durch
$y = f_t(x) = x^2 \cdot \sqrt{t - x}$
eine Kurvenschar gegeben.
Alle Maxima liegen auf einer weiteren Kurve. Bestimme die Funktionsgleichung dieser Kurve.



Freiwillige Übung

Die Kurve $y = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + t}}$ hat an der Stelle $x = 3$ einen Wendepunkt.
Wie gross ist t?