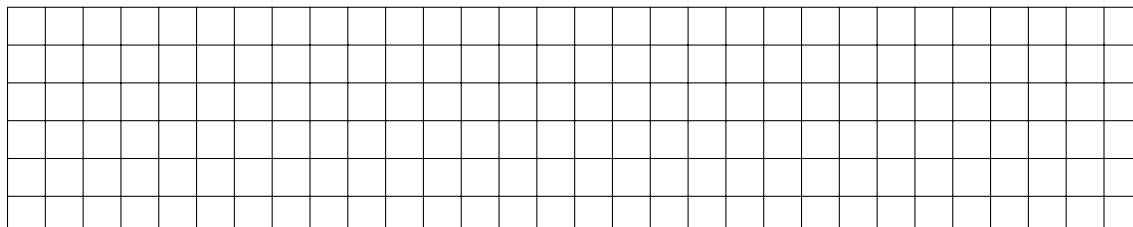


6. Funktionen verknüpfen, Kettenregel

6.1. Technik des Differenzierens

1. Verknüpfen von Funktionen

Wir führen zwei Funktionen hintereinander aus. Der Mathematiker nennt das Verknüpfen oder Verschachteln von Funktionen.



Wenn wir $f(g(x))$ schreiben, dann wird zuerst $g(x)$ ausgeführt. Das Ergebnis bezeichnen wir mit u . Erst dann wird $f(u)$ ausgeführt.
 $g(x)$ ist die innere Funktion, $f(u)$ die äussere Funktion.

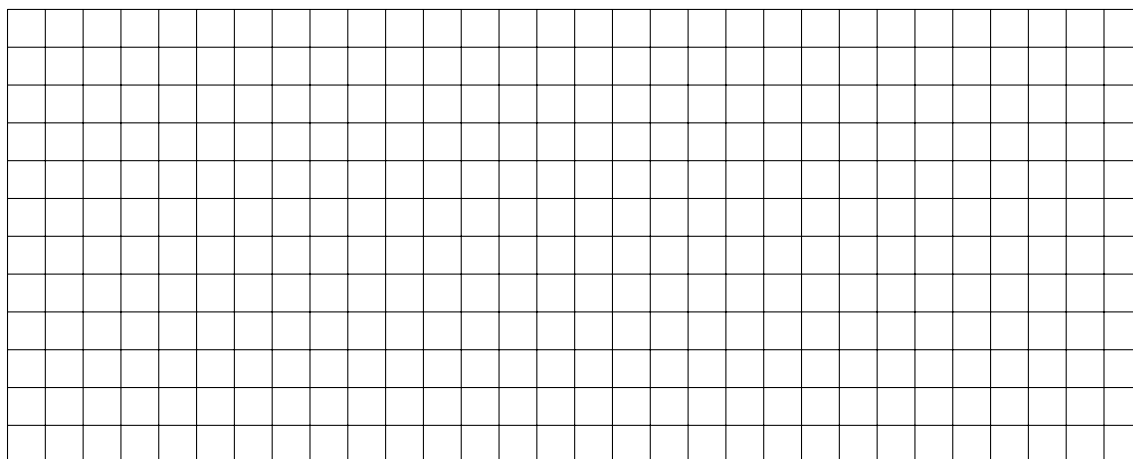
2. Musterbeispiel

Gegeben sind die Funktionen $f(x) = 1 - x^2$, $g(x) = \cos(x)$ und $h(x) = \frac{1}{x}$.
 Bestimme die Funktionsgleichungen der folgenden Verknüpfungen.

- a) $f(g(x)) = \dots\dots\dots$
- b) $g(f(x)) = \dots\dots\dots$
- c) $g(h(x)) = \dots\dots\dots$
- d) $h(g(x)) = \dots\dots\dots$
- e) $f(g(h(x))) = \dots\dots\dots$

3. Ableiten verknüpfter Funktionen

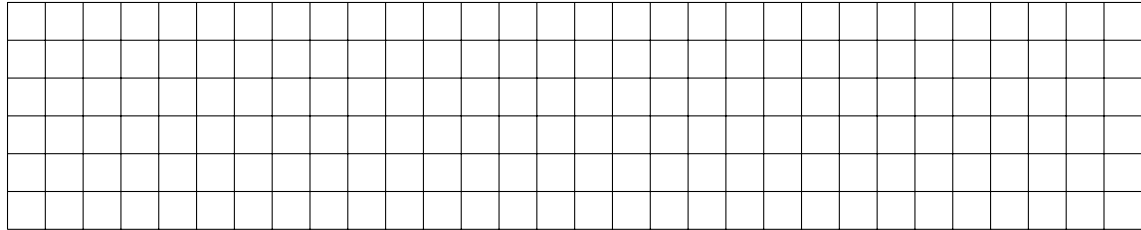
Gegeben sind die Funktionen $y = f(u)$ und $u = g(x)$. Wir leiten $y' = (f(g(x)))'$ her.



4. **Hyperbel**

$$y = f(x) = \sqrt{x^2 - 4}.$$

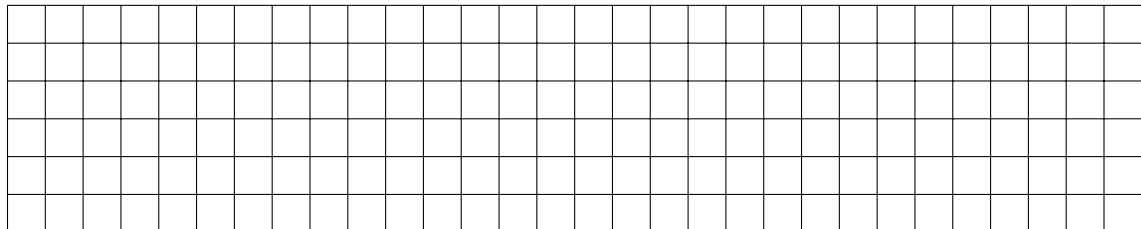
Die durch diese Gleichung beschriebene Kurve ist ein Hyperbelbogen. Der Querschnitt eines AKW-Kühlturms besteht aus zwei Hyperbelbogen.



5. **Musik**

$$y = f(x) = \sin(4x).$$

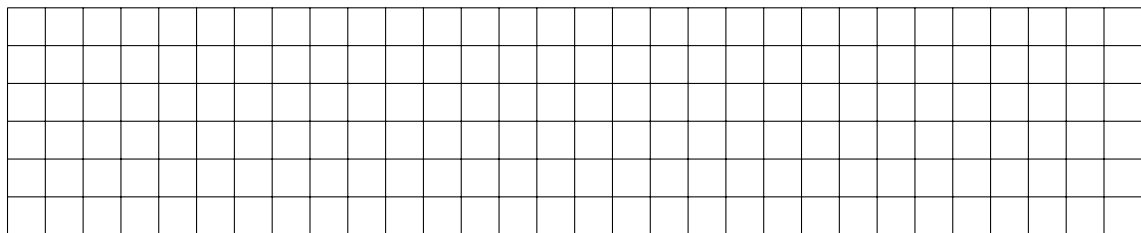
Wenn die Frequenz einer Schwingung vervierfacht wird, dann wird der erzeugte Ton um zwei Oktaven höher.



6. **Synthesizer**

$$y = f(x) = \sin(x) + \frac{1}{2} \cdot \sin(2x).$$

Das ist eine Überlagerung von zwei Schwingungen.



7. **Technik des Differenzierens**

a) $y = (x^2 + \sqrt{x})^4$

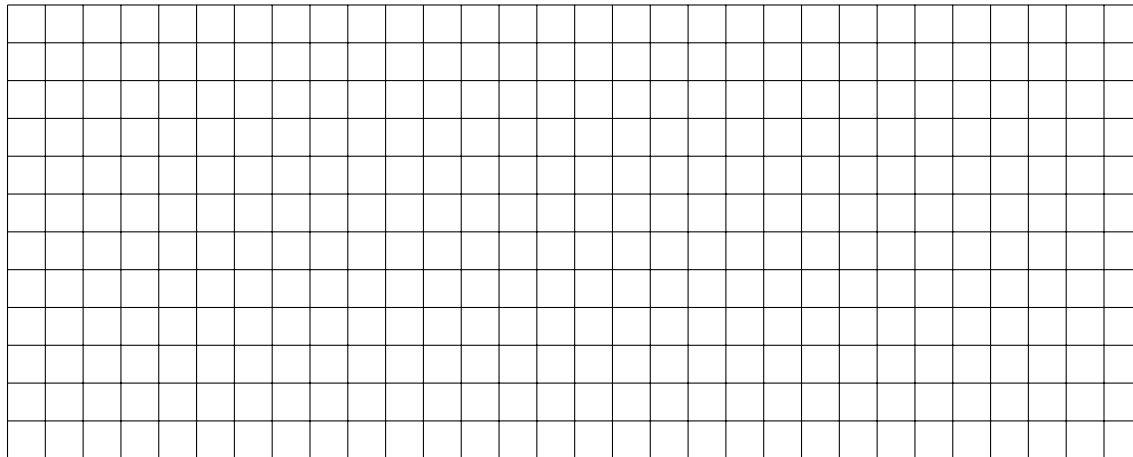
b) $y = \sqrt{2 + \sin(3x - \pi)}$

c) $y = (3 \cdot \cos(3x^3 - 3\pi))^3$

Zusatzaufgabe
 $y = f(x) = \sqrt[3]{4 - x^3}$. Leite zweimal ab.

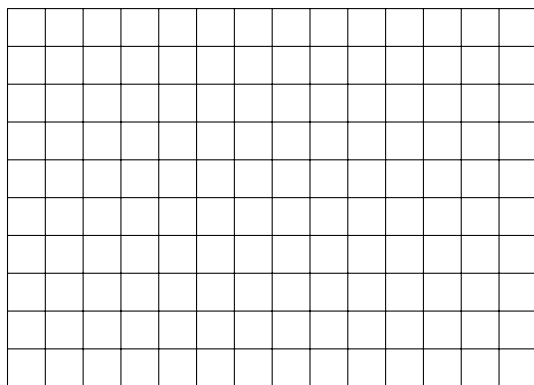
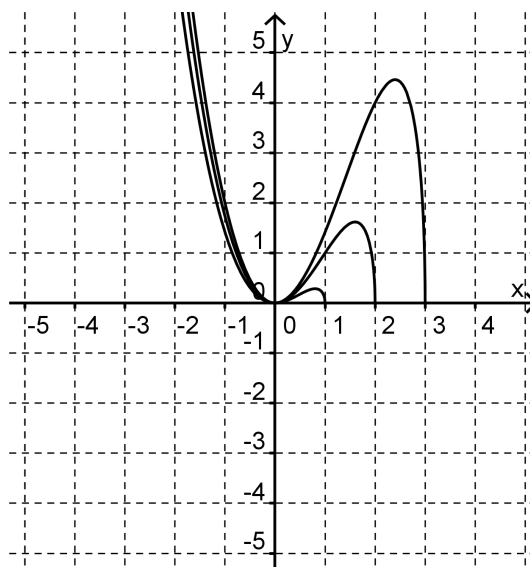
3. **Maximale Querschnittsfläche**

Eine oben offene Rinne soll aus drei Brettern gleicher Breite hergestellt werden. Wie muss die Rinne beschaffen sein, damit sie möglichst grosses Fassungsvermögen hat? Die mathematische Version dieser Aufgabe lautet: Welches gleichschenklige Trapez mit drei gleichlangen Seiten hat maximale Fläche?



4. **Kurve aller Maxima**

Für $t > 0$ ist durch $y = f_t(x) = x^2 \cdot \sqrt{t - x}$ eine Kurvenschar gegeben. Alle Maxima liegen auf einer weiteren Kurve. Bestimme die Funktionsgleichung dieser Kurve.



Freiwillige Übung

Die Kurve $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + t}}$ hat an der Stelle $x = 3$ einen Wendepunkt.
Wie gross ist t ?