5. Gebrochen rationale Funktionen

5.1. Produkt- und Quotientenregel

1. **Bemerkung**

   Bekannt ist, wie man Potenzen ableitet und dass man eine Summe summandenweise ableiten darf. Ein Produkt darf man aber nicht faktorweise ableiten.

2. **Produktregel**

   Gegeben ist eine Funktion, die aus 2 Faktoren besteht, also $y(x) = f(x) \cdot g(x)$.
   Dann gilt $y'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ oder in Kurzform $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

3. **Musterbeispiele**

   a) $y = f(x) = x^3 \cdot \sin(x)$ ....

   ....

   b) $y = f(x) = (x^2 + 1) \cdot \cos(x)$ ....

   ....

   c) $y = f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$ ....

   ....

   d) $y = f(x) = \left(5x^2 + \sin(x)\right)^2$ ....

   ....

   e) $y = f(x) = (3x^2 - 5) \cdot (4 - \sqrt{x})$ (ohne Ausmultiplizieren) ....

   ....

4. **Potenzen**

   a) $y = f(x) = (\sin(x))^2$ ....

   ....

   b) Wir verallgemeinern: $y = (f(x)^2) = f^2(x)$ ....

   ....

   c) Berechne die Ableitung von $(4x^3 - 5x)^2$ ....

   ....

   d) Finde eine Formel für $(f^3(x))' =$ ....

   ....

   ....

   ....

   e) Verallgemeinerung: $(f^n(x))' =$ ....

   ....

5. Musterbeispiele

a) $y = f(x) = (3x-5)^3$. Bestimme $f'(x) =$ ....

....

b) $y = \sqrt{x^2+6}$ ....

....

....

c) $y = \dfrac{1}{(4x-7)^5}$ ....

....

> **Übungen**
>
> a) Leite ab: $f(x) = 3x^2 \cdot \sin(x)$
>
> b) Ebenso: $y = \dfrac{3}{\sqrt[3]{3x^3-3}}$

6. Quotientenregel

$\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$ oder in Kurzform $\left[\dfrac{f}{g}\right]' = \dfrac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$

7. Beweis

Wir beginnen mit $y(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ oder kurz $y = \dfrac{f}{g}$. Gesucht ist $y'(x)$, kurz y'.

Um die Quotientenregel zu beweisen, schreiben wir so um, dass wir die Produktregel verwenden können.

8. **Musterbeispiele**

a) $y(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. Bestimme y' und y''.

b) $y(x) = \dfrac{x^3}{x^2-8}$. Bestimme y' und y''.

9. **Ableitung der Tangens-Funktion**

$(\tan(x))' =$

Übungen

a) $y(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2-4}$. Bestimme y' und y''.

b) $y(x) = \dfrac{7x^6}{\sqrt[5]{4x^3-2}}+1$. Die zweite Ableitung ist ziemlich schwierig.

5.2. Kurvenbetrachtungen

1. **Definition**

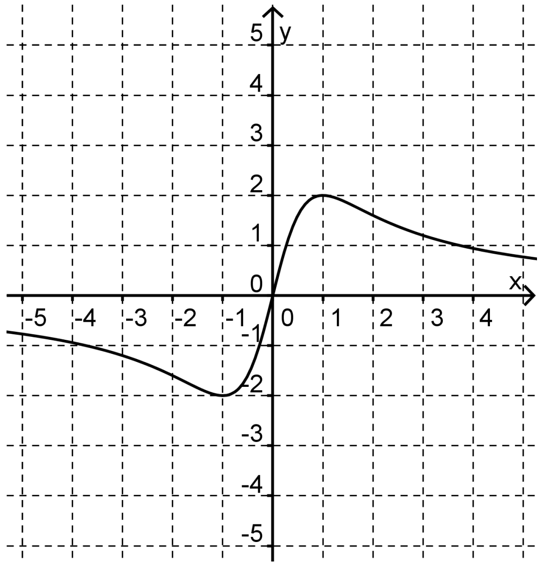
   Eine Funktion der Art $y(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynome sind, heisst gebrochen rationale Funktion. Der Grad von $p(x)$ heisst Zählergrad, der Grad von $q(x)$ heisst Nennergrad.

2. **Bemerkung**

   Die Grundaufgaben der Kurvendiskussion (Bestimmen der Nullstellen, Extremalstellen und Wendestellen mitsamt den zugehörigen Kurvenpunkten) gelten auch für gebrochen rationale Funktionen.

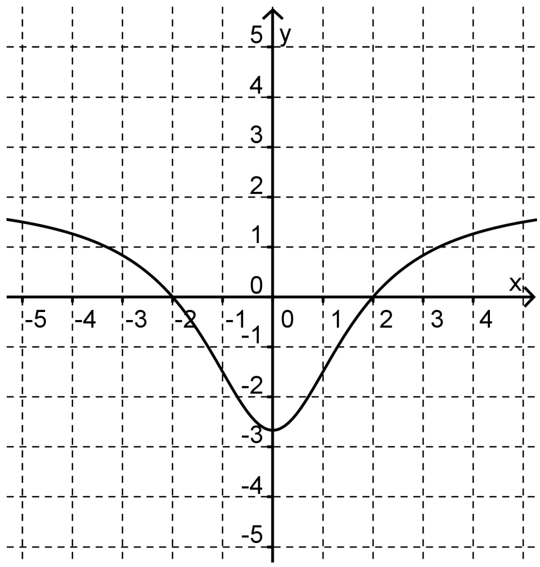
3. **Musterbeispiel I**

   $y(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$



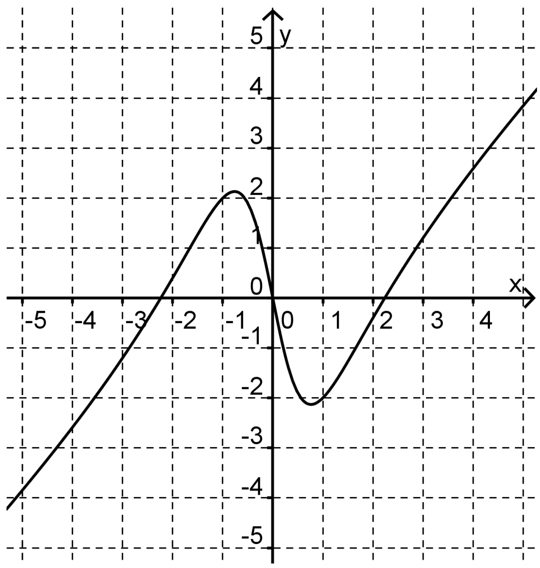
4. **Musterbeispiel II**

   $y(x) = \dfrac{2x^2-8}{x^2+3}$



5. **Musterbeispiel III**

$$y(x) = \frac{x^3 - 5x}{x^2 + 1}$$



6. **Symmetriebetrachtungen**

a) Ein Polynom ist gerade, das andere ungerade.

....

....

b) Zählerpolynom und Nennerpolynom sind beide gerade.

....

....

c) Wenn Zählerpolynom und Nennerpolynom beide ungerade sind, dann

....

....

Übung

Gerade oder ungerade (oder gar nichts)?

$$\frac{x^5 - 3x^3 + 18x}{x^2 + x + 4}$$

$$\frac{x^2 - 35}{x^3 + 18}$$

7. **Vorbereitungsaufgabe**

Was passiert mit den folgenden Termen, wenn man für x eine betragsmässig grosse Zahl einsetzt?

$\frac{35}{x}$ $\qquad$ $\frac{4}{x^2}$ $\qquad$ $\frac{81}{x - 81}$

8. **Verhalten im Unendlichen**

a) Wenn der Zählergrad kleiner ist als der Nennergrad ($Z < N$)

b) Wenn Zählergrad und Nennergrad gleich sind ($Z = N$)

c) Wenn ($Z = N + 1$)

d) Eine horizontale oder schräge Asymptote beschreibt das Verhalten des Funktionsgraphen für $x \to \pm\infty$. Eine horizontale Asymptote kann in der Mitte des Koordinatensystems von der Funktionskurve geschnitten werden. Die Fälle $Z > N + 1$ betrachten wir nicht. Es gibt dann keine geradlinige Asymptote.

9. **Definitionsbereich**

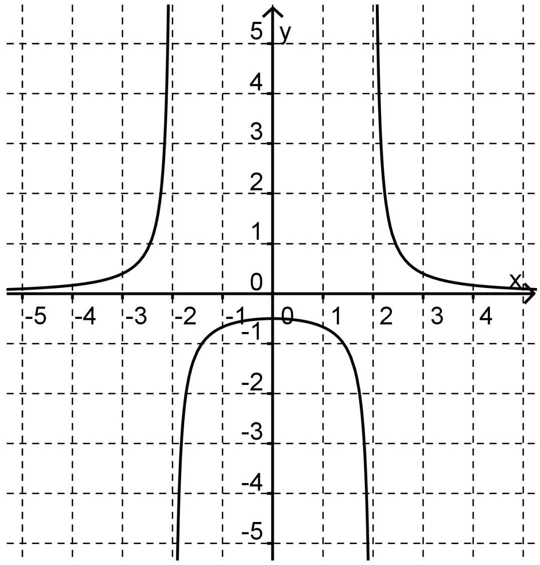
In den bisherigen Beispielen konnte das Nennerpolynom nie $= 0$ werden. In diesen Fällen ist die Funktion überall definiert.

Wir notieren ....

In den folgenden Musterbeispielen weist das Nennerpolynom auch Nullstellen auf. Damit wird der Definitionsbereich eingeschränkt.

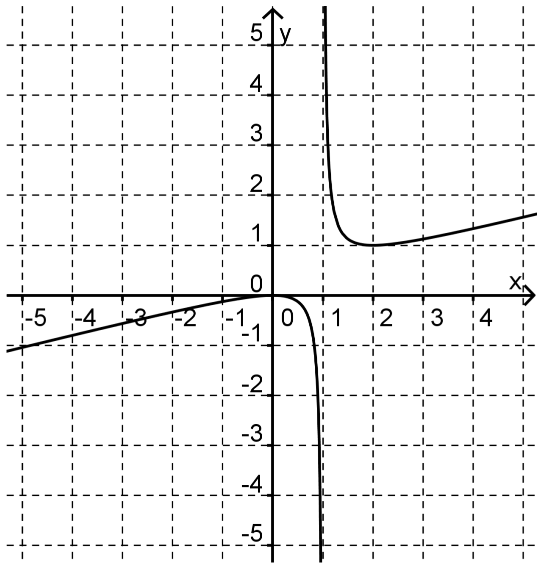
10. **Musterbeispiel IV**

$$y(x) = \frac{2}{x^2 - 4}$$



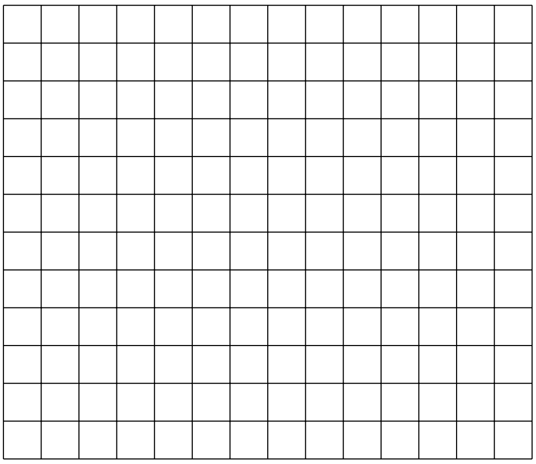
11. **Musterbeispiel V**

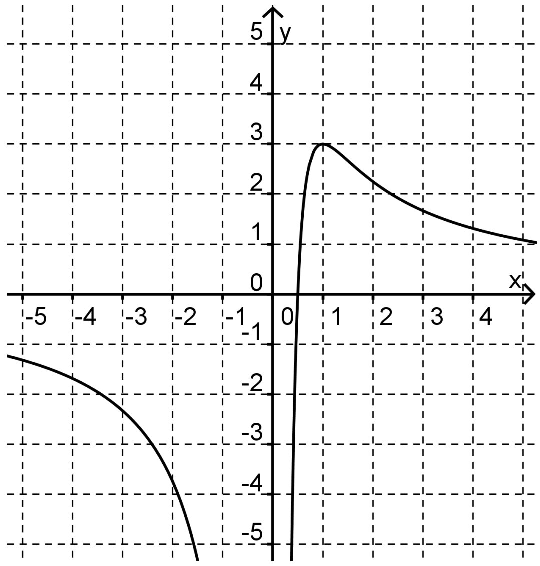
$$y(x) = \frac{x^2}{4x - 4}$$



12. **Musterbeispiel VI**

$y(x) = \dfrac{6x-3}{x^2}$





13. **Definition**

In den Nullstellen des Nennerpolynoms ist die Funktion nicht definiert. Es entsteht also eine (oder mehrere) Definitionslücke(n).

Eine solche Definitionslücke nennt man ....

Zu jeder Polstelle gehört ....

14. **Bemerkungen**

Eine Polstelle zerteilt den Funktionsgraphen. Man spricht aber immer noch von *einer* Kurve (bestehend aus mehreren Kurvenbogen). Eine vertikale Asymptote kann von der Kurve nicht geschnitten werden (im Unterschied zu einer horizontalen oder schrägen Asymptote). Zur vollständigen Kurvendiskussion gehört also auch die genaue Angabe des Definitionsbereichs sowie der Polstellen und Asymptoten.

Übungen

Gedankenstütze: Definitionsbereich, Symmetrie; alle speziellen Kurvenpunkte wie Nullstellen, Extremalpunkte, Wendepunkte; Polstellen, Asymptoten.

a) $y(x) = \dfrac{x^3+5x}{x^2-3}$

b) $y(x) = \dfrac{x^2+3x}{x-1}$

c) $y(x) = \dfrac{4x^2}{x^2+4}$

5.3. Anwendungen

1. **Vorgegebene Steigung**

   Wie gross muss t sein, damit die Kurve $y(x) = \dfrac{x}{x^2+t}$ an der Stelle $x = 2$ die Steigung $m = -1.5$ aufweist?

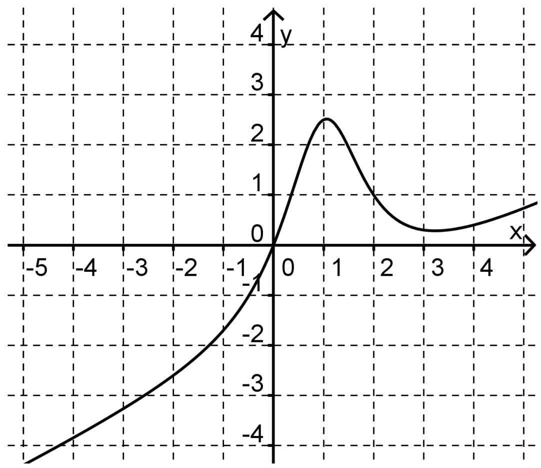
2. **Wendetangente**

   Wie lautet die Gleichung der Wendetangente zur Kurve $y(x) = \dfrac{4x^2+1}{x^2+4}$?

3. **Grösste Entfernung zur Aysmptote**

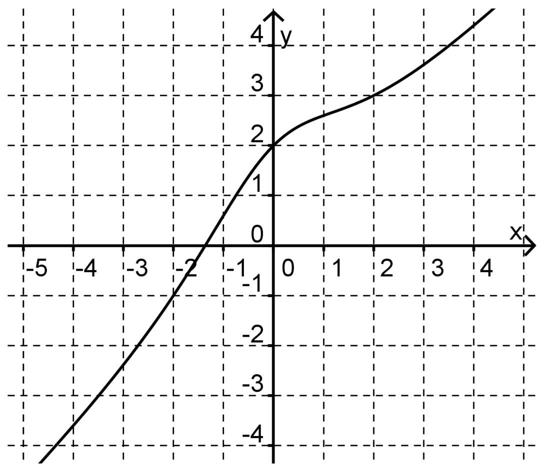
   In welchem Punkt ist die Kurve am weitesten von ihrer Asymptoten entfernt?

   $y(x) = \dfrac{x^3-6x^2+10x}{2x^2-4x+4}$



4. **Kleinste Steigung**

   In welchem Punkt ist die Kurve zu $y(x) = \dfrac{x^3+4x+8}{x^2+4}$ am *flachsten*?



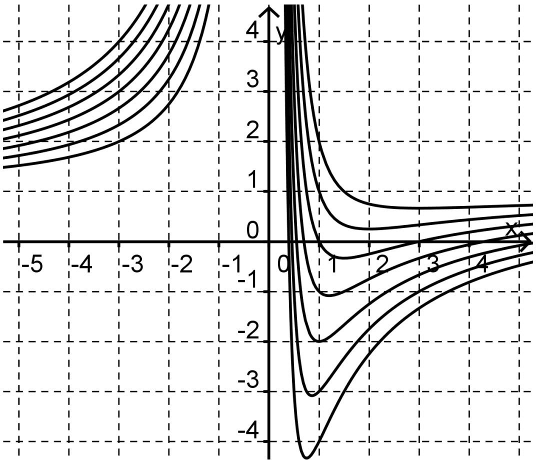
5. **Funktion bestimmen**

   Gesucht ist eine möglichst einfache gebrochen rationale Funktion mit den Asymptoten $x = 2$, $x = -1$ und $y = 4$.

6. **Die Kurve aller Minima**

Für jedes $t > 0$ ist durch $y = f_t(x) = \dfrac{x^2 - t \cdot x + 3}{x^2}$ eine Kurve gegeben.

Wir betrachten also eine Kurvenschar mit Parameter t.



Berechne die Koordinaten des Minimums, abhängig von t.

Weise nach, dass alle Minima der betrachteten Kurven $f_t(x)$ auf einer weiteren Kurve mit der Gleichung $y = 1 - \dfrac{3}{x^2}$ liegen.

7. **Knacknuss**

Gegeben ist $y(x) = \dfrac{3x-2}{x^2}$

Von welchen Punkten der y-Achse aus gibt es (mindestens) eine Tangente an die Kurve. Von Interesse ist besonders der oberste (höchstliegende) Punkt auf der y-Achse, für den eine Tangente möglich ist.

Lernkontrollen

a) $y(x) = \dfrac{x^3 - x}{2x^2+1}$

Bestimme den Schnittwinkel zwischen der Kurve und ihrer schrägen Asymptote.

b) $y(x) = \dfrac{a \cdot x}{x^2+b}$ hat einen Wendepunkt $W(\,2\,|\,3\,)$.

Bestimme a und b.

c) Bestimme eine möglichst einfache gebrochen rationale Funktion mit den Asymptoten $x = 1$ und $y = 3x - 4$.

d) Auf welcher Kurve liegen alle Wendepunkte von

$$y = f_t(x) = \frac{x^2 - t \cdot x + 3}{x^2}?$$