4. Gebrochen rationale Funktionen

Übungen

1) Technik des Ableitens, Produktregel

Bestimme y' und y'': a) $y = x^4 \cdot \cos(x)$. b) $y = \sqrt[3]{x^2+1}$

2) Technik des Ableitens, Quotientenregel

Bestimme y' und y'': a) $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$. b) $y = \frac{\sin(x)}{x}$.

3) Kurvendiskussionen

Führe für die folgenden Kurven eine vollständige Kurvendiskussion durch:

a) $y = \frac{1}{x^4 - x^2}$ b) $y = \frac{x^2}{x-3}$ c) $y = \frac{x^2-4}{x-1}$

d) $y = \frac{x^2-x-2}{x-3}$ e) $y = \frac{3x^2-1}{x^3}$

4) Tangenten, Normalen

a) Bestimme die Wendetangenten der Kurve $y = \frac{x}{x^2+3}$.

b) Bestimme die Kurvennormale im Punkt (3 | ...) der Kurve $y = \frac{x^2-4}{x-1}$

5) Parameter bestimmen

Eine Funktion $y = \frac{x^2 + a \cdot x + b}{x^2}$ hat in (2 | 0) ihren Wendepunkt. Bestimme a und b.

6) Schnittwinkel

In welchen Punkten und unter welchen Winkeln schneiden sich die beiden Kurven $y = \frac{6}{x^2+5}$ und $y = \frac{1}{x}$?

7) Minimaler Umfang

Ein Kreissektor der Fläche 10 cm^2 soll minimalen Umfang haben. Wie gross ist der Radius und der Zentriwinkel?

8) Toblerone

Betrachte ein gerades regelmässiges dreiseitiges Prisma (Toblerone). Die Grundfläche ist ein gleichseitiges Dreieck. Die Toblerone soll 100 cm^3 Inhalt haben und aus möglichst wenig Material hergestellt werden, d.h. die Oberfläche soll minimal werden. Wie hoch wird die Toblerone?

9) Die Kurve aller Extremalwerte

Für $t \neq -1$ ist durch $y = f(x) = \frac{x^2+t}{x-1}$ eine Kurve gegeben.

a) Zeige, dass alle Kurven unabhängig von t die gleichen Asymptoten haben.

b) Für welche Werte von t gibt es (lokale) Extremas? Bestimme die Koordinaten dieser Punkte in Abhängigkeit von t. Auf welcher Kurve liegen alle diese Punkte?

10) Die Kurve aller Wendepunkte

Für jedes $k > 0$ ist durch $y = f_k(x) = \dfrac{2k}{x^2 + k^2}$ eine Kurve gegeben.

Alle Wendepunkte liegen auf einer weiteren Kurve, deren Gleichung gesucht ist.