4. Gebrochen rationale Funktionen

Ergebnisse

1) Technik des Ableitens, Produktregel

a) $y' = 4x^3 \cdot \cos(x) - x^4 \cdot \sin(x)$ $\qquad$ $y'' = (12x^2 - x^4) \cdot \cos(x) - 8x^3 \cdot \sin(x)$

b) $y' = \frac{2}{3} x \cdot \left(x^2+1\right)^{-2/3}$ $\qquad$ $y'' = \frac{2}{3} \cdot \left(x^2+1\right)^{-2/3} + \frac{2}{3} x \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(x^2+1\right)^{-5/3} \cdot 2x$ (*)

* Der Taschenrechner fasst zusammen und schreibt die Ergebnisse anders.

2) Technik des Ableitens, Quotientenregel

a) $y' = \frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$ $\qquad$ $y'' = \frac{4 \cdot \left(x^2+1\right)^2 - 4x \cdot 2\left(x^2+1\right) \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^4}$ (*)

b) $y' = \frac{x \cdot \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$

$y'' = \frac{\left(\cos(x) - x \cdot \sin(x) - \cos(x)\right) \cdot x^2 - \left(x \cdot \cos(x) - \sin(x)\right) \cdot 2x}{x^4}$ (*)

3) Kurvendiskussionen

[Resultate ohne y' bzw. y"]

a) D = R \ {–1, 0, 1}, gerade Funktion, keine Nullstellen,
Polstellen und vert. Asymptoten x = 0, x = –1, x = 1, horiz. Asymptote y = 0.
Maxima ($\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ | –4), keine Wendepunkte.

b) D = R \ {3}, N (0 | 0) doppelt, Maximum; Polstelle und vert. Asymptote x = 3, schräge Asymptote y = x + 3, Minimum (6 | 12), keine Wendepunkte.

c) D = R \ {1}, N (–2 | 0), (2 | 0). Pol und vert. As: x = 1, schräge As. y = x + 1. Weder Extrema noch Wendepunkte.

d) D = R \ {3}; keine Symmetrie; N (–1 | 0), (2 | 0),
Polstelle und vertikale Asymptote x = 3, schräge Asymptote: y = x + 2
Max (1 | 1), Min(5 | 9), keine Wendepunkte.

e) D = R \ {0}; ungerade Funktion; N (0.577 | 0), (–0.577 | 0)
Pol und vertikale Asymptote x = 0, horizontale Asymptote y = 0
Min (–1 | –2), Max (1 | 2), W(–1.414 | –1.768), (1.414 | 1.768).

4) Tangenten, Normalen

a) Tangenten: y = –1/24·x – 3/8, y = 1/3·x, y = –1/24·x + 3/8
[Die Kurve hat drei Wendepunkte.]

b) $y = -\frac{4}{7}x + \frac{59}{14}$

5) Parameter bestimmen

a = –3, b = 2
[y(2) = 0 und y"(2) = 0 nach a und b auflösen.]

6) Schnittwinkel

S_1 (5 | 1/5) mit $\alpha_1 = 1.523°$, S_2 (1 | 1) mit $\alpha_2 = 26.565°$.

7) Minimaler Umfang
$r = 3.162$ cm, Zentriwinkel 114.592°
[$F = 10 = \alpha/360 \cdot \pi r^2$ nach α auflösen. Ferner $b/2\pi r = \alpha/360$ und α einsetzen, womit $b = 20/r$. Dann ist $2r + b$ zu minimieren. Man erhält zunächst den Radius r.]

8) Toblerone
4.254 cm hoch.

[Volumen = 100 setzen. Die Volumengleichung $V = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \cdot h$ nach h auflösen und h in die Oberflächenformel $O = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 + 3a \cdot h$ einsetzen. Minimiere die Oberfläche durch Ableiten nach a. Dann erhält man zunächst die Bodenkante $a = 7.368$ cm.]

9) Die Kurve aller Extremalwerte
a) $x = 1$ (vertikale Asymptote) ist unabhängig von t.
Die schräge Asymptote $y = x + 1$ ist ebenfalls unabhängig von t.
b) Wenn $t > -1$, dann hat $y'(x) = 0$ Lösungen.
Koordinaten $\left(1 \pm \sqrt{t+1} \mid 2 \pm 2 \cdot \sqrt{t+1}\right)$.
Es gilt $y = 2x$ für alle diese Punkte.

10) Die Kurve aller Wendepunkte

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2x}$$

[$y'' = 0$ und somit $x = \frac{k}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{3}{2k}$, k eliminieren ergibt die Funktionsgleichung.]