Mehrfache Nullstellen

Studium

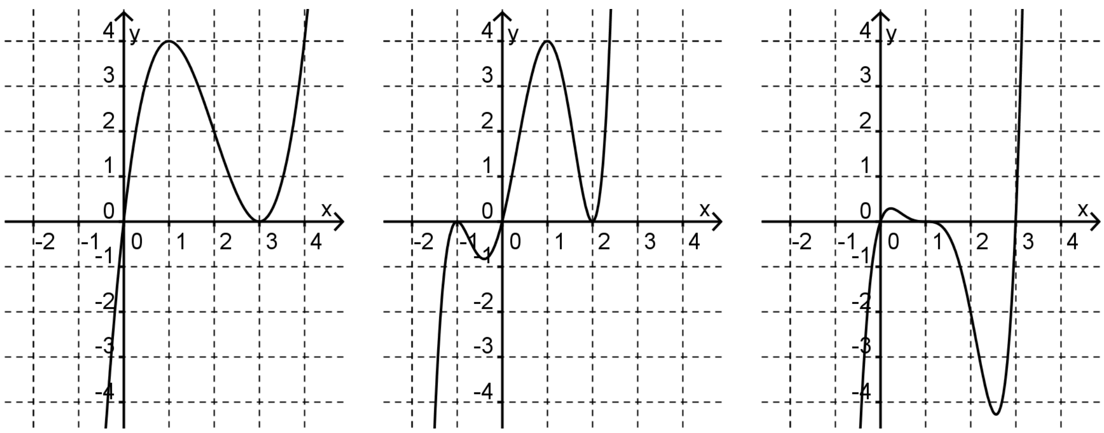
Betrachtungen zu Nullstellen von Polynomfunktionen und den Funktionsgraphen dazu.

1) Vorbemerkung

Eine Parabel $y = f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ hat höchstens zwei Nullstellen. Diese Tatsache ist bereits früher bekannt. Eine Parabel ist auch eine Polynomfunktion vom Grad 2.
Dass eine Polynomfunktion vom Grad n höchstens n Nullstellen haben kann, ist vernünftigerweise anzunehmen, wird hier aber nicht bewiesen.

2) Beispiele

a) Betrachte die Funktion $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. Sie hat Grad 3, aber nur zwei Nullstellen. Folglich muss eine Nullstelle eine doppelte sein. Durch Faktorisieren stellen wir fest, dass $y = f(x) = x \cdot (x-3) \cdot (x-3) = x \cdot (x-3)^2$ gilt. Somit ist die Nullstelle $x = 3$ doppelt, weil der Faktor $(x - 3)$ doppelt vorkommt. Der Graph ist in der Figur links dargestellt.



b) Die Funktion $y = x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 4x$ hat Grad 5, aber nur drei Nullstellen. Folglich muss die Funktion entweder zwei doppelte oder eine dreifache Nullstelle haben. Faktorisieren ergibt $y = x \cdot (x+1)^2 \cdot (x-2)^2$. Somit sind die Nullstellen $x = -1$ und $x = 2$ doppelt. Der Graph ist in der Figur in der Mitte dargestellt.

c) Die Funktion $y = x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 10x^2 + 3x$ hat ebenso Grad 5, aber nur drei Nullstellen. Mit der Faktorisierung $y = x \cdot (x-1)^3 \cdot (x-3)$ wird klar, dass die Nullstelle $x = 1$ dreifach ist. Der Graph ist in der Figur rechts dargestellt.

3) Feststellungen

Aus den Graphen wird sofort ersichtlich:

a) Bei einer einfachen Nullstelle schneidet der Funktionsgraph die x-Achse.
b) Bei einer doppelten Nullstelle berührt der Funktionsgraph die x-Achse.
c) Bei einer dreifachen Nullstelle hat man einen Terrassenpunkt auf der x-Achse.

4) Definition

Enthält f(x) den Faktor $(x - a)^n$, dann nennt man die Stelle $x = a$ eine n-fache Nullstelle der Funktion f(x).

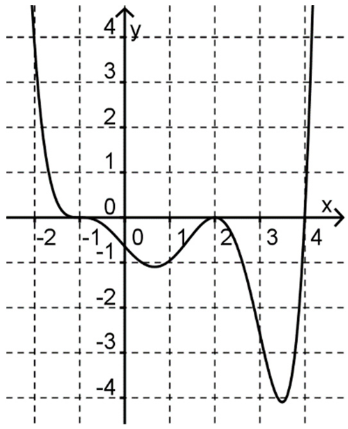
5) Umgekehrte Aufgabenstellung

Mit dem jetzigen Wissen kann man die Aufgabe auch umkehren: Wenn der Funktionsgraph gegeben ist, dann kann man im Wesentlichen die Funktionsgleichung dazu hinschreiben.
Der Funktionsgraph zeigt eine dreifache Nullstelle bei $x = -1$, eine doppelte bei $x = 2$ und eine einfache bei $x = 4$.
Die Funktionsgleichung lautet also im Wesentlichen

$$y = (x+1)^3 \cdot (x-2)^2 \cdot (x-4).$$

Diese Funktion wäre aber grafisch nicht so gut ersichtlich.
Der rechts dargestellte Funktionsgraph gehört zur Funktion

$$y = \frac{1}{25} \cdot (x+1)^3 \cdot (x-2)^2 \cdot (x-4).$$



Den Faktor 1/25 kann man aber ohne Zusatzinformation nicht genau ermitteln.

6) Satz

Die Vielfachheit einer Nullstelle wird pro Ableiten um 1 kleiner.
Diesen Satz beweisen wir nicht, aber ein Beispiel möge illustrieren:
$y = x^3$ hat die dreifache Nullstelle $x = 0$.
Dann hat $y' = 3x^2$ die doppelte Nullstelle $x = 0$ und $y'' = 6x$ hat für $x = 0$ noch eine einfache Nullstelle.

7) Folgerungen

Aus dem Satz ergibt sich durch logische Überlegungen

a) Eine dreifache Nullstelle in der Funktionsgleichung muss noch eine doppelte Nullstelle in der ersten Ableitung sein (also hat die Kurve dort eine horizontale Tangente) und muss ebenso noch eine einfache Nullstelle in der zweiten Ableitung sein (also hat man dort einen Wendepunkt). Und ein Wendepunkt mit horizontaler Kurventangente ist ein Terrassenpunkt (der in diesem Fall auf der x-Achse liegt).
b) Eine doppelte Nullstelle in der Funktionsgleichung muss noch eine einfache Nullstelle in der ersten Ableitung sein. Somit wird die x-Achse dort berührt (ob es sich um ein Minimum oder Maximum handelt, ist egal), weil es in der zweiten Ableitung keine Nullstelle mehr sein kann und somit sicher kein Wendepunkt ist.
c) Eine einfache Nullstelle in der Funktionsgleichung ergibt einen Schnittpunkt (und keinen Berührpunkt) mit der x-Achse. Denn man hat dann sicher keine Nullstelle in der ersten Ableitung (sonst wäre es eine doppelte Nullstelle gewesen). Man kann allerdings in der zweiten Ableitung an genau dieser Stelle wieder eine Nullstelle haben. Dann ist es ein Wendepunkt (aber kein Terrassenpunkt) auf der x-Achse.
d) Und schliesslich bedeutet eine doppelte Nullstelle in der ersten Ableitung (welche nicht Nullstelle der Funktion war), dass man einen (nicht auf der x-Achse liegenden) Terrassenpunkt hat.

8) Vorzeichenwechsel

Zusätzliche Illustration liefert der Vorzeichenwechsel. Bei einer einfachen und dreifachen Nullstelle wechselt die Funktion das Vorzeichen (d.h. geht auf die andere Seite der x-Achse, bei einer doppelten (theoretisch auch bei einer vierfachen) Nullstelle jedoch nicht. Höhere als dreifache Nullstellen lassen wir aber ausser Betracht.