3. Polynomfunktionen

Ergebnisse

1) Kurvendiskussionen

a) $y' = 3x^2 - 12x + 9$, $y'' = 6x - 12$
Nullstellen (2 | 0), ($2 \pm \sqrt{3}$ | 0), Maximum (1 | 2), Minimum (3 | –2), Wendep. (2 | 0)

b) $y' = 3x^2 - 6x$, $y'' = 6x - 6$
N (–1 | 0), (2 | 0), Max (0 | 4), Min (2 | 0), W(1 | 2)

c) $y' = 4x^3 - 18x^2 + 18x$, $y'' = 12x^2 - 36x + 18$
N (1 | 0), (2 | 0), (–0.562 | 0), (3.562 | 0), Max (1.5 | 1.0625), Min (0 | –4), (3 | –4), W(0.634 | –1.75), (2.366 | –1.75)

d) $y' = 3x^2 - 6$, $y'' = 6x$
N (–2.791 | 0), (1 | 0), (1.791 | 0), Max ($-\sqrt{2}$ | 10.657), Min ($\sqrt{2}$ | –0.657), W (0 | 5)

e) $y' = 4x^3 - 6x$, $y'' = 12x^2 - 6$ gerade Funktion

N (±1.817 | 0), Max (0 | –1), Min ($\pm\frac{\sqrt{6}}{2} \mid -\frac{13}{4}$) resp. (±1.225 | –3.25),

W ($\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \mid -\frac{9}{4}$) resp. (±0.707 | –2.25).

2) Mehrfache Nullstellen

a) $y' = 4x^3 - 6x^2 - 6x + 4$, $y'' = 12x^2 - 12x - 6$
N (–1 | 0) und (2 | 0) beide doppelt, Max ($\frac{1}{2} \mid \frac{81}{16}$) resp. (0.5 | 5.0625),
W(–0.366 | 2.25), (1.366 | 2.25)

b) $y' = 4x^3 + 9x^2 - 20x$, $y'' = 12x^2 + 18x - 20$
N (–5 | 0), (2 | 0) beide einfach, N(0 | 0) doppelt. Max (0 | 0),
Min (–3.628 | –101.635), (1.378 | –7.533), W (–2.243 | –58.855), (0.743 | –3.986)

c) $y = f(x) = \frac{1}{6} \cdot x^4 - x^3 + 2x^2$
$y' = 2/3\, x^3 - 3x^2 + 4x$, $y'' = 2x^2 - 6x + 4$
N (0 | 0) doppelt, Min (0 | 0), W (1 | 7/6), (2 | 8/3)

3) Terrassenpunkte

[Resultate ohne y' bzw. y'']

a) N (0 | 0) dreifach, also Terrassenpunkt. Weiterer T (1 | 1), W (½ | ½)

b) N (1 | 0) doppelt, auch Minimum, T (0 | 1), W(2/3 | 11/27)

c) N (–2 | 0) dreifach, also T; N (1 | 0) doppelt, Min.
Max (–0.2 | 4.199), W (–0.935 | 2.262), (0.535 | 1.762)

4) Mehrfache Nullstellen

a) (4 | 0), (–1 | 0) beide doppelt, (0 | 0) einfach

b) (–2 | 0) doppelt, (3 | 0) dreifach, (17 | 0) einfach

c) Höchstens 6

d) links $y = (x + 1)\cdot x^3\cdot(x - 2)^3$,
rechts $y = (1/32)\cdot(x + 3)^3\cdot(x + 1)\cdot x^2\cdot(x - 2)^2$.
[Ohne den Faktor 1/32 geht die Kurve durch den Punkt (–2 | –64).]

5) Überlegungsaufgabe

Eine Funktion mit drei dreifachen Nullstellen, z.B. $y = (x + 1)^3\cdot x^3\cdot(x - 1)^3$.

6) Wendetangenten

S (½ | 3), α = 122.699° bzw. 57.300° für den spitzen Zwischenwinkel.

[Wendetangenten: $y = \frac{7}{6}x + \frac{29}{12}$ in (–1 | 1.25) sowie $y = -\frac{10}{3}x + \frac{14}{3}$ in (2 | –2).]

7) Funktionskurven bestimmen

a) $y = -\frac{11}{27}x^3 + 2x^2$

[Löse das Gleichungssystem y(0) = 0, y'(0) = 0, y(3) = 7, y'(3) = 1.]

b) $y = 15x^4 - 20x^3 + 5$

[Löse y(0) = 5, y'(0) = 0, y''(0) = 0, y(1) = 0, y'(1) = 0.]

8) Extremalwertaufgabe

Im Wendepunkt (–0.5 | –218.75)

9) Maximale Flächen

a) Breite 0.56 m, Höhe 0.28 m.

[Setze x für den Radius. Dann ist u = 2 = πx + 2x + 2h. Löse nach h auf und setze bei F = ½ π x^2 + 2xh ein und maximiere die Fläche.]

b) 8/3.

[Die Breite ist 2x, die Höhe f(x).]

10) Minimaler Abstand

(2 | 2/3)

[Berechne das Quadrat des Abstandes $(x - 1)^2 + (f(x) - 1)^2$ und minimiere.]

11) Quader

648 cm^2.

[Setze für die Seitenkanten x, 2x und (daraus folgend) 27 – 3x. Maximiere das Volumen.]

12) Pyramide

Höhe 2.887 m, Mantelfläche 47.14 m^2. Ganze Oberfläche 80.47 m^2.

[Setze für x die halbe Bodenkante. Dann ist die halbe Bodendiagonale $\sqrt{2}\cdot x$. Dann kann man mit Pythagoras die Höhe berechnen, da man die Seitenkante s = 5 kennt. Es ist $h = \sqrt{25 - 2x^2}$.

Setze alles in die Volumenformel $V = \frac{1}{3}\cdot(2x)^2\cdot h$ ein und maximiere das Volumen.

Das maximal mögliche Volumen beträgt übrigens 32.875 m^2.

Für die Mantelfläche berechne zunächst die Höhe einer Dreiecks-Seitenfläche.]