

2. Der Differenzialquotient

2.1. Die Ableitung einer Funktion

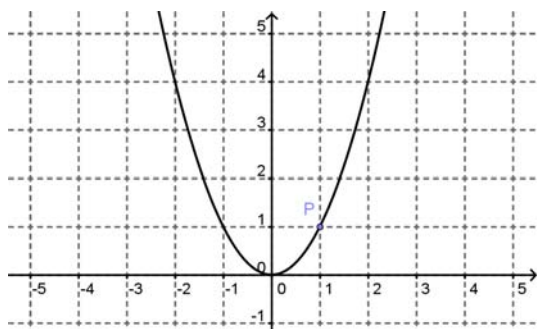
1) Musterbeispiel

Wie gross ist die Steigung der Parabel $y = x^2$ im Punkt $P(1 | 1)$?

Die Steigung einer Kurve

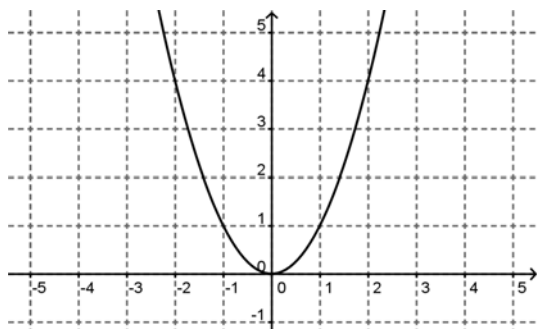
.....

Vorgehen: Wir wählen einen Punkt Q rechts von P und lassen dann Q auf der Kurve gegen P gehen.



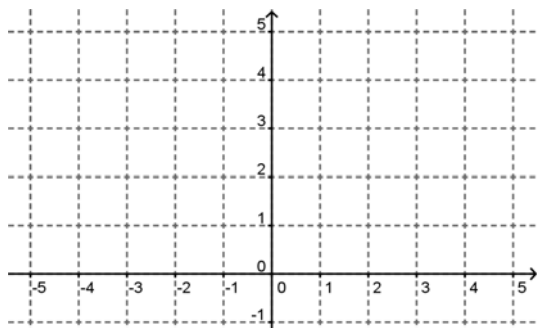
2) Verallgemeinerung

Wie gross ist die Steigung der Parabel $y = f(x) = x^2$ im Punkt $P(x | x^2)$?



3) Differenzialquotient

Die Steigung einer Kurve $y = f(x)$ im Punkt $P(x | f(x))$ berechnet man wie folgt:



4) Praktische Bedeutung:

In der Differenzialrechnung interessiert man sich also nicht nur für den Wert einer Funktion, sondern auch für die Steigung, d.h. die momentane Änderung.

Finde praktische Beispiele, bei denen diese Grösse von Bedeutung ist.

5) Die Ableitung einer Funktion

Wir definieren jetzt eine Funktion, die jedem x die Steigung einer gegebenen Funktion $f(x)$ zuordnet.

Diese Funktion

Bezeichnung:

6) Überlegungsaufgaben

a) Wie gross ist die 1. Ableitung von $y = 4x$?

b) Bestimme die 1. Ableitung von $y = -7$

7) Musterbeispiel

Gegeben ist $y = f(x) = x^3$. Gesucht ist $y' = f'(x)$.

8) Faktorregel fürs Ableiten

$y = f(x) = 5x^2$. Bestimme $y' = f'(x)$.

.....

9) Summenregel fürs Ableiten

$y = f(x) = x^3 + x^2$. Bestimme $y' = f'(x)$.

.....

10) Regel fürs Ableiten von Potenzen

$y = f(x) = x^6$. Bestimme $y' = f'(x)$.

.....

11) Potenzgesetze beachten

Bestimme $y' = f'(x)$.

a) $y = 6 \cdot \sqrt{x}$

b) $y = \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x}$

c) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

12) Die 2. Ableitung einer Funktion

Natürlich ist auch die Ableitung der Ableitung wieder eine Funktion. Diese Funktion bezeichnen wir mit $y''(x)$ resp. $f''(x)$ und nennen sie 2. Ableitung.

Praktische Bedeutung:

13) Musterbeispiel

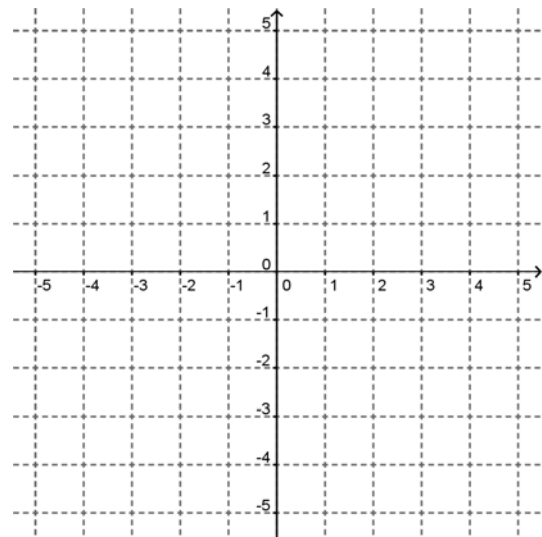
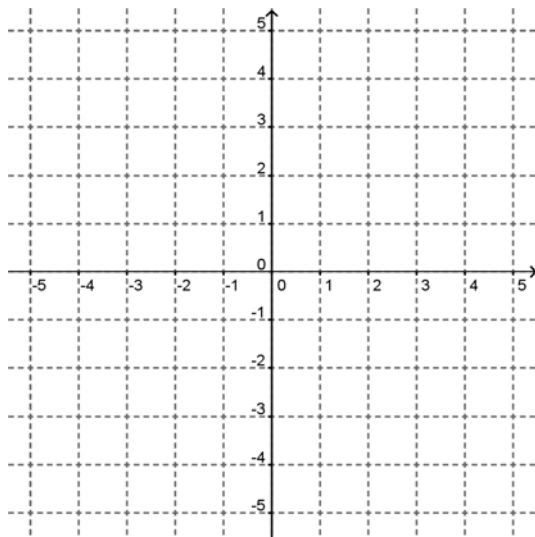
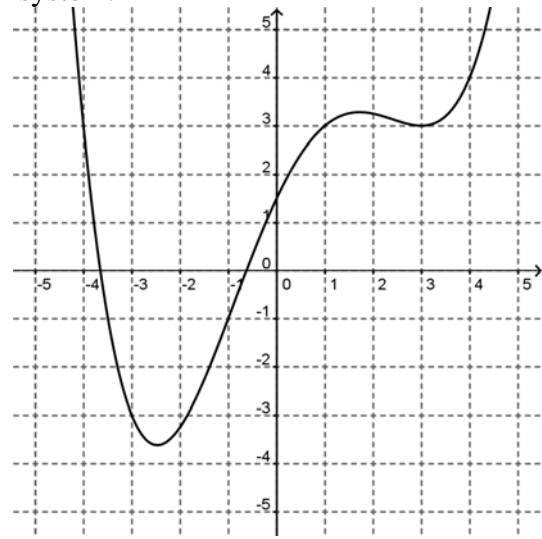
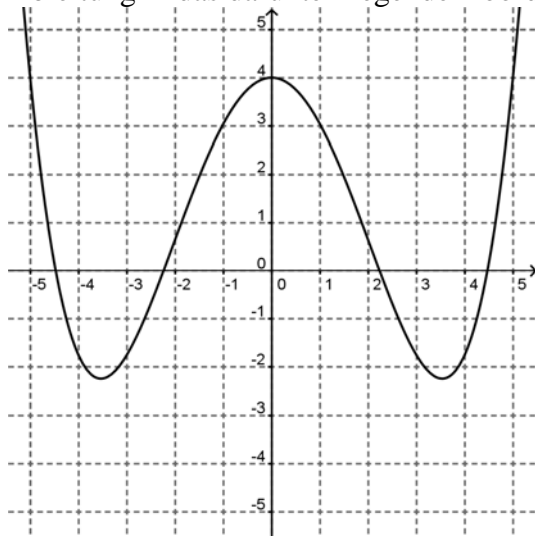
$y = x^6 + 3x^4 - 2x - 173$. Bestimme die ersten beiden Ableitungen.

.....

2.2. Grafisches Ableiten

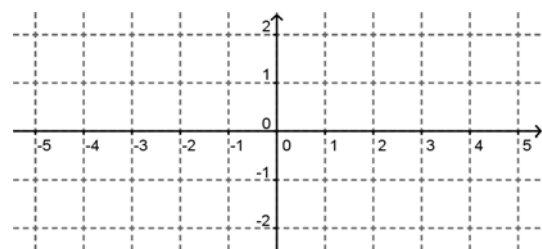
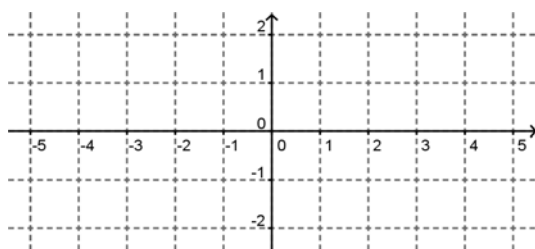
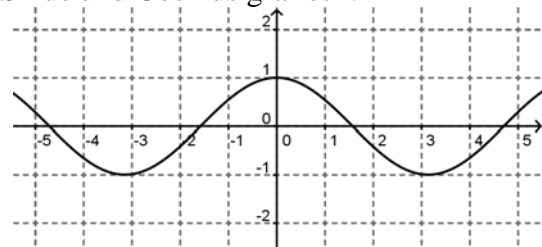
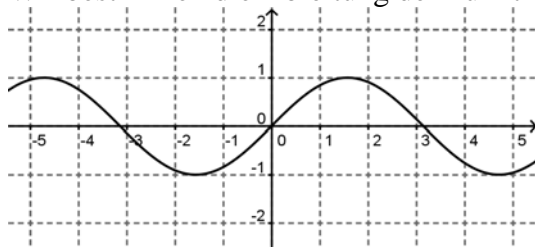
1) Verfahren und Vorgehen

Die Bildschirmausschnitte zeigen Graphen verschiedener Funktionen. Skizziere die 1. Ableitung in das darunter liegende Koordinatensystem.



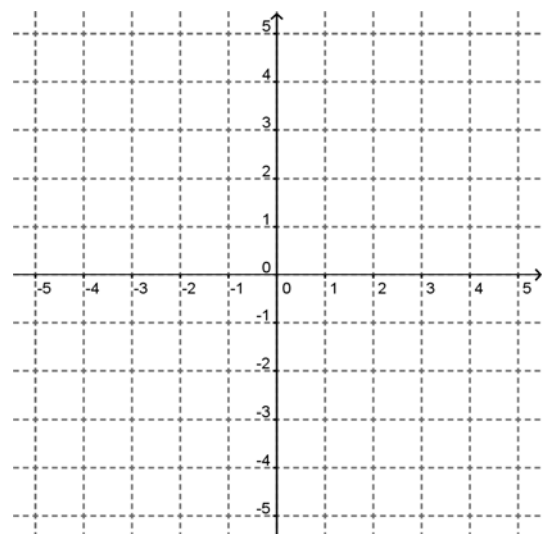
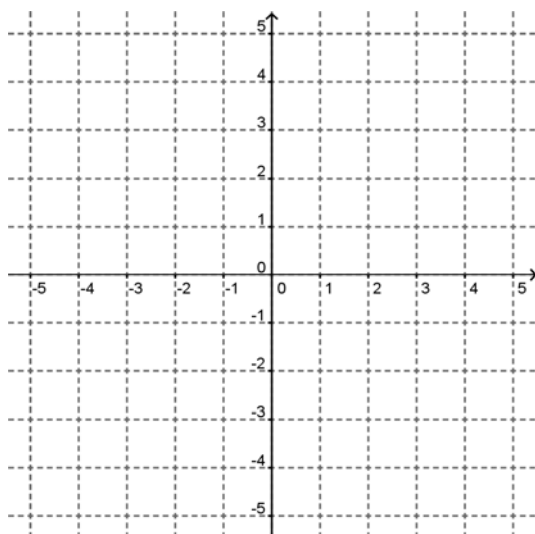
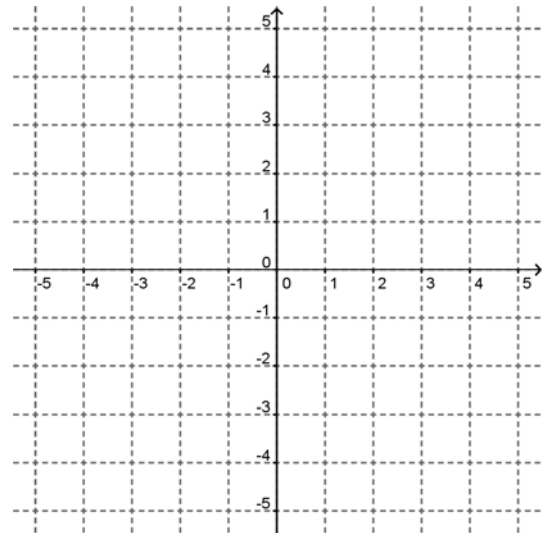
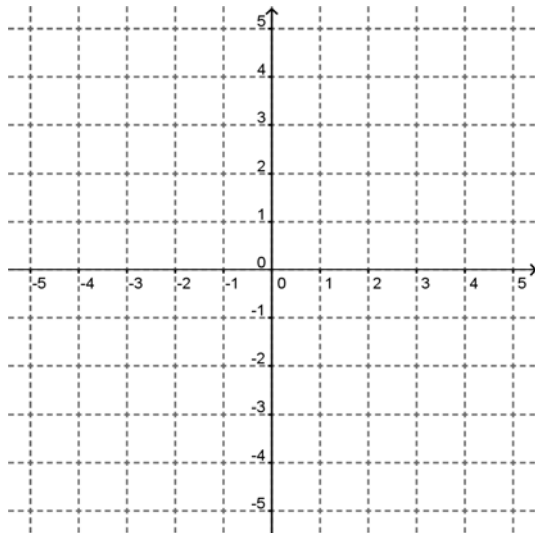
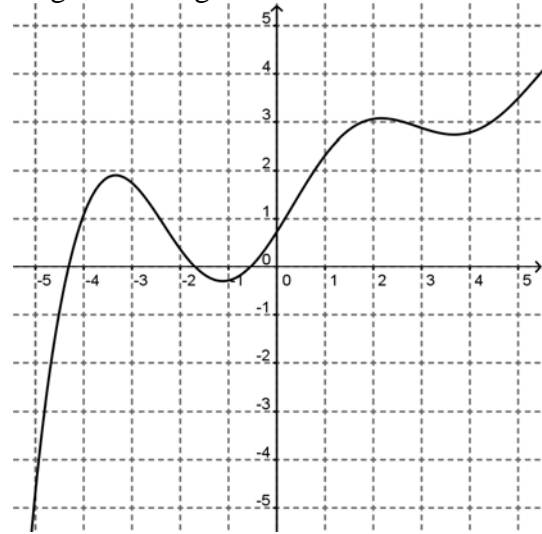
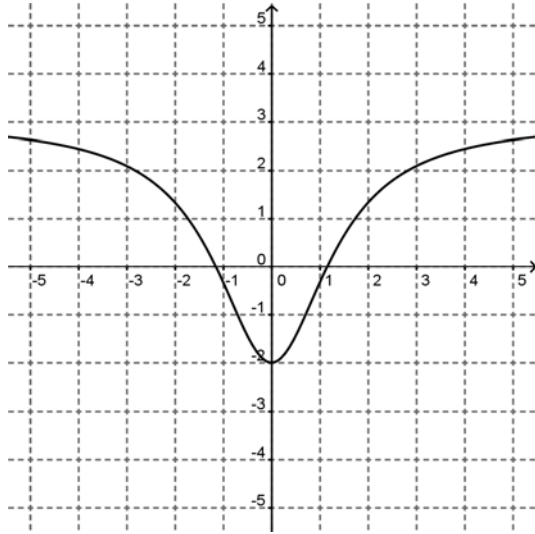
2) Die Ableitung der trigonometrischen Funktionen

Wir bestimmen die Ableitung der Funktionen Sinus und Cosinus grafisch.



3) **Zweimaliges Ableiten**

Bestimme zeichnerisch die ersten beiden Ableitungen der dargestellten Kurven.



Welches ist die praktische Bedeutung dieser Aufgabe?

.....

2.3. Grundaufgaben der Differenzialrechnung

1) Steigung in einem Kurvenpunkt

Welche Steigung hat die Kurve $y = x^5 - x^3 - 5x$ im Punkt $(2 | \dots)$?

2) Punkte mit vorgegebener Kurvensteigung

In welchen Punkten hat die Kurve $y = 2x^3 - 9x^2 - 12x$ die Steigung $m = 12$?

3) Tangente in einem Kurvenpunkt bestimmen

Bestimme die Gleichung der Kurventangente im Punkt $P(1 | \dots)$ an die Kurve $y = x^4 - 2x$.

4) Schnittwinkel zweier Kurven

Die beiden Kurven $y = x^2 - x$ und $y = 6 - x^2$ schneiden sich in einem Punkt im ersten Quadranten. Bestimme in diesem Punkt den Schnittwinkel.

5) Berührung zweier Kurven

Zeige, dass sich die beiden Kurven $y = x^3 - x$ und $y = -x^2 + 15x - 20$ berühren.

6) Tangente von einem Punkt aus an eine Kurve legen

Bestimme eine Kurventangente an die Kurve $y = -x^2 + 4x$, welche durch $P(0 | 1)$ geht.

7) Kurvennormale

Errichte im Punkt $(3 | \dots)$ der Kurve $y = x^2 - 3x + 2$ die Kurvennormale.

Zu diesen sieben Aufgaben gibt es ein Leitprogramm.

8) Lernkontrolle

Die folgenden Aufgaben dienen dazu, die Aufgaben aus dem Leitprogramm zu festigen.

a) Gegeben ist die Funktion $y = x^3 - 2x^2 + x - 3$.

Bestimme die Gleichung der Kurventangente im Punkt $P(2 | \dots)$

b) Gegeben sind die Funktionen $y = x^3 + 4x - 3$ und $y = x^2 + 2x - 3$.

Bestimme die Schnittpunkte und Schnittwinkel.

c) Welche Tangenten an die Kurve $y = x^4 - 3x^2 - 3$ sind parallel zu $y = 2x + 17$?

d) Gegeben ist $y = x^3 - 3x^2$. In welchem Winkel schneidet die Kurve die x-Achse?

e) Gegeben ist die Funktion $y = x^3 - 2x^2 + 3$.

Bestimme die Gleichung der Kurvennormale im Punkt $P(-1 | \dots)$

f) Die Kurven $y = x^4 + 17x$ sowie $y = 5x^3 + x^2 - 12$ berühren sich. Bestimme den Berührungspunkt und die Gleichung der gemeinsamen Tangente in diesem Punkt.

9) Rechtwinklig schneidende Kurven gesucht

Die Kurven $y = -\frac{1}{2}x + 4$ sowie $y = t \cdot x^2$ sollen sich rechtwinklig schneiden.

Wie gross ist t ?

10) Kurventangenten

Gegeben ist $y = x^2 - 3x + 5$. Bestimme die Tangenten an diese Kurve, welche durch den Punkt $P(-2 | -1)$ gehen.