2. Der Differenzialquotient

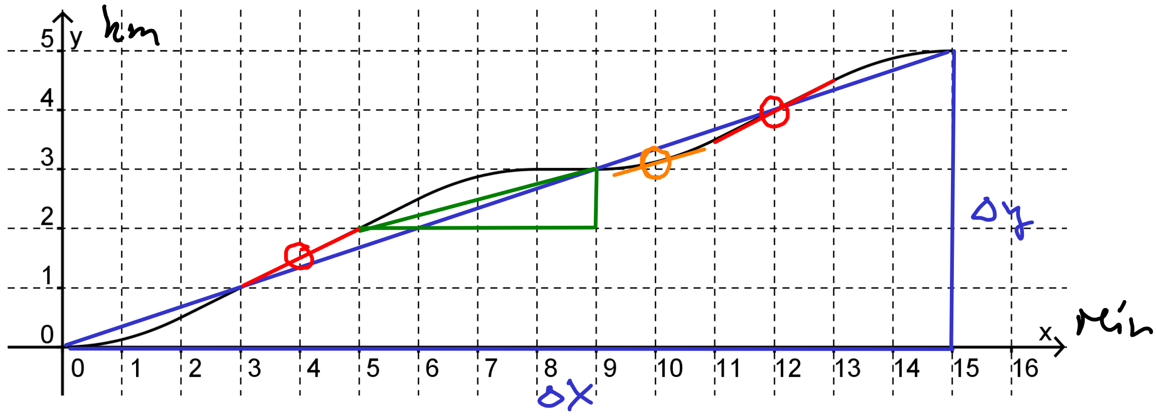
2.1. Durchschnittliche und momentane Änderungsrate

1. **Beispiel**

   Die folgende Graphik zeigt ein Weg-Zeit-Diagramm eines Radfahrers.

   In x-Richtung ... Zeit (z. B. Min.) ...

   In y-Richtung ... Strecke (z. B. km) ...



   Deute die Graphik und beantworte die Fragen:

   a) Welche Durchschnittsgeschwindigkeit hatte der Radfahrer insgesamt?

   $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5\ \text{km}}{15\ \text{min}} = 20\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

   b) Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit war der Radfahrer von Minute 5 bis Minute 9 unterwegs? Was passiert zwischen Minute 8 und Minute 9?

   $\frac{1\ \text{km}}{4\ \text{min}} = 15\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ Geschw. = 0 (Verkehrsampel)

   c) Mit welcher (momentanen) Geschwindigkeit war der Radfahrer nach genau 12 Minuten unterwegs? (Oder: Wie schnell war er beim km 4?)

   $\frac{1\ \text{km}}{2\ \text{min}} = 30\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

   d) Mit welcher (momentanen) Geschwindigkeit war der Radfahrer nach genau 10 Minuten unterwegs?

   ? Man benötigt die Tangente an die Kurve

2. **Geschwindigkeit**

   Wenn sich ein Körper gleichmässig bewegt, dann ist die Geschwindigkeit konstant und kann mit Hilfe von zwei Messdaten leicht berechnet werden. Der zugehörige Funktionsgraph ist dann eine Gerade und die gesuchte Geschwindigkeit ist die Steigung dieser Geraden.

   Schwieriger wird es, wenn die Bewegung nicht gleichmässig erfolgt (beispielsweise bei einem Bremsvorgang), denn dann ändert die Geschwindigkeit dauernd. Wenn wir nun die Geschwindigkeit zu einem festen Zeitpunkt berechnen wollen, dann berechnen wir die momentane Geschwindigkeit.

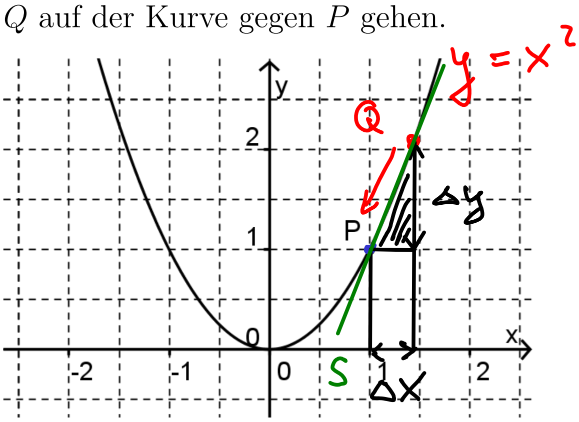
2.2. Die Ableitung einer Funktion

1. **Musterbeispiel**

Wie gross ist die Steigung der Parabel $y = f(x) = x^2$ im Punkt $P(1|1)$?

Die Steigung einer Kurve in einem bestimmten Kurvenpunkt ist gleich gross wie die Steigung der Kurventangente in diesem Punkt.

Vorgehen: Wir wählen einen Punkt Q auf der Parabel, rechts von P, und lassen dann Q auf der Kurve gegen P gehen.



$P(1|1)$

$Q(1+\Delta x \mid (1+\Delta x)^2)$

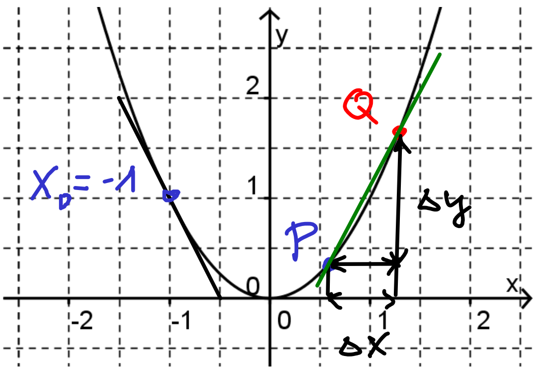
$S = PQ$ ist nicht die Tangente, sondern eine Sekante

$$m_S = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(1+\Delta x)^2 - 1}{\Delta x} = \frac{\cancel{1} + 2\Delta x + \Delta x^2 \cancel{-1}}{\Delta x}$$

$$= \frac{\cancel{\Delta x}(2+\Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = 2 + \cancel{\Delta x}^{\,0} \Rightarrow m_t = \lim_{\Delta x \to 0}(2+\Delta x) = \underline{\underline{2}}$$

2. **Verallgemeinerung**

Wie gross ist die Steigung der Parabel $y = f(x) = x^2$ im Punkt $P(x_0|f(x_0))$?



$P(x_0 \mid x_0^2)$

$Q(x_0 + \Delta x \mid (x_0+\Delta x)^2)$

$m_{PQ} = ?$

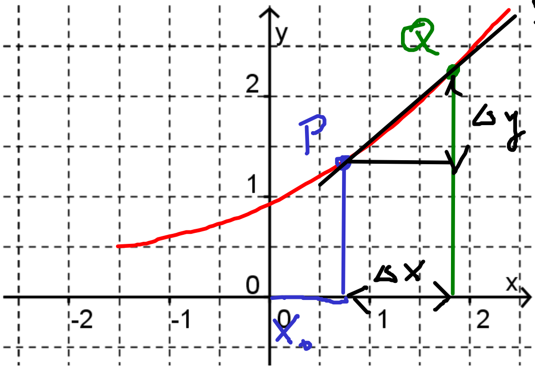
$$m_{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0+\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \frac{\cancel{x_0^2} + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 \cancel{-x_0^2}}{\Delta x}$$

$$= \frac{\cancel{\Delta x}(2x_0 + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = 2x_0 + \cancel{\Delta x}^{\,0} \Rightarrow m_t = 2 \cdot x_0$$

$$\boxed{m_t = \lim_{\Delta x \to 0} m_s}$$

3. Differenzialquotient

Die Steigung einer Kurve $y = f(x)$ in einem Kurvenpunkt $P(x_0|f(x_0))$ berechnet man wie folgt:



$S = PQ$

$Q\,(x_0 + \Delta x \mid f(x_0 + \Delta x))$

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underbrace{\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$ Differenzen-quotient

$$\boxed{m_t = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$ Differenzial-quotient

4. Die Ableitung einer Funktion

Wir definieren jetzt eine (neue) Funktion, die jedem x die *Steigung* einer gegebenen Funktion $f(x)$ zuordnet. Das heisst, dass wir den bisher fest gedachten Punkt $P(x_0|f(x_0))$ wieder veränderbar machen und somit $P(x|f(x))$ schreiben.

Diese Funktion heisst 1. Ableitung von f(x).

Bezeichnung: $f'(x) = y' = y'(x)$

$$\boxed{f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

5. Praktisches

Wenn man die Ableitung betrachtet, dann interessiert man sich also um die Veränderung der Funktionswerte, d.h. um die Änderung der Kurve. Dazu gibt es ganz praktische Beispiele:

Dow-Jones-Index (Veränderung gegenüber dem Vortag)
Corona-Zahlen
Geschwindigkeit
Beschleunigung ist die Änderungsrate der Geschwindigkeit

$y = x^2 \Rightarrow y' = 2x$

6. **Kurzbeispiele**

a) Wie gross ist die erste Ableitung von $y = 4x$? $y' = 4$

Das ist die Steigung einer Geraden

b) Bestimme die erste Ableitung von $y = -7$. $y' = 0$

c) Folgerung: Die Ableitung einer Konstanten ergibt Null.

d) $y = f(x) = 7x - 12 \qquad y' = f'(x) = 7$

e) $y = x^2 + 5x - 1$

$y' = 2x + 5$

7. **Musterbeispiel**

Gegeben ist $y = f(x) = x^3$. Bestimme $y' = f'(x)$.

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x^3} + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3 - \cancel{x^3}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}\,(3x^2 + 3x \cdot \Delta x + \Delta x^2)}{\cancel{\Delta x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + \underbrace{3x \cdot \Delta x}_{0} + \underbrace{\Delta x^2}_{0})$$

$$= 3x^2$$

$$\boxed{[x^3]' = 3x^2}$$

8. **Ableiten von Potenzen**

Gegeben ist $y = f(x) = x^6$. Bestimme $y' = f'(x) =$ $6x^5$

Verallgemeinerung: $\boxed{[x^n]' = n \cdot x^{n-1}}$

9. **Faktorregel fürs Ableiten**

Gegeben ist $y = f(x) = 5 \cdot x^2$. Bestimme $y' = f'(x) =$ $10x = 5 \cdot 2x$

Verallgemeinerung: $[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$

Ein konstanter Faktor bleibt beim Ableiten stehen.

10. **Summenregel fürs Ableiten**

Gegeben ist $y = f(x) = x^3 + x^2$. Bestimme $y' = f'(x) =$ $3x^2 + 2x$

Verallgemeinerung: $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

Eine Summe kann man summandenweise ableiten.

11. **Übungen**

Bestimme jeweils die erste Ableitung der gegebenen Funktion.

a) $y = 4 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 5 \cdot x - 3.$ $5 \cdot x^1 - 3x^0$

b) $y = 6 \cdot x^5 + \pi \cdot x^2 + \sqrt{5} \cdot x + 2156$

c) $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

d) $y = \frac{x^2}{3} + \frac{3}{x^2} = \frac{1}{3}x^2 + 3x^{-2}$

e) $y = \frac{4}{x} = 4x^{-1}$

f) $y = \frac{3}{\sqrt[3]{x}} = 3 \cdot x^{-\frac{1}{3}}$

a) $y' = 12x^2 - 4x + 5$
$(= 4 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 5 \cdot x^0 - 3 \cdot 0)$

b) $y' = 30x^4 + 2\pi x + \sqrt{5}$

c) $y' = \left[x^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

d) $y' = \left[\frac{1}{3}x^2 + 3x^{-2}\right]' = \frac{2}{3}x - 6x^{-3}$

e) $y' = -4x^{-2}$

f) $y' = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}\right) = -x^{-\frac{4}{3}}$

Lernkontrolle

Bestimme $f'(x)$ für die folgenden Funktionen:

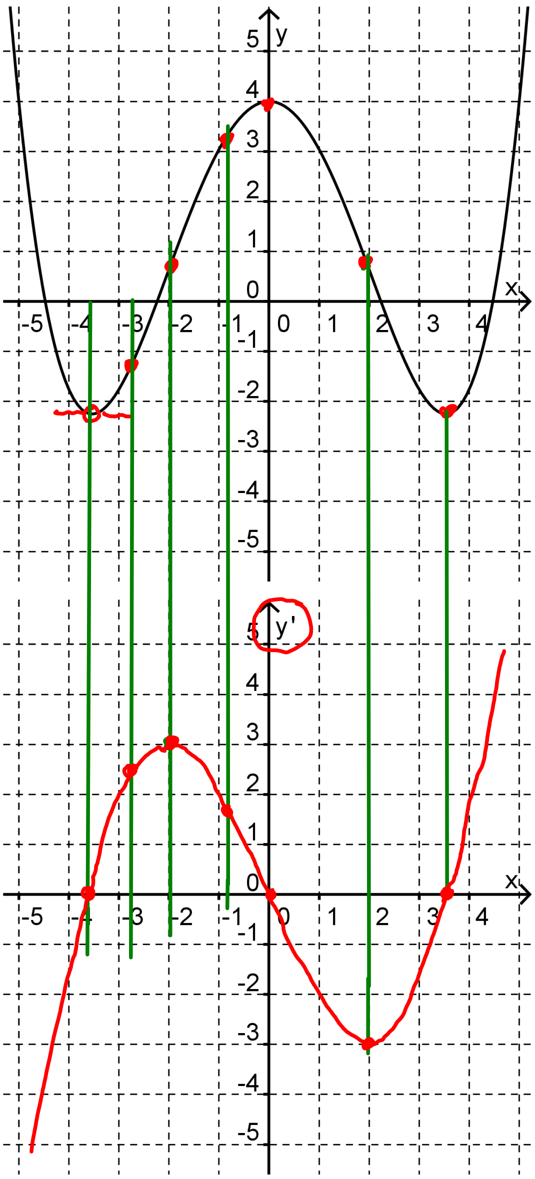
a) $y = 7 \cdot x^6 - 5 \cdot x^4 + 3 \cdot x^2 - 1$ $y' = 42x^5 - 20x^3 + 6x$

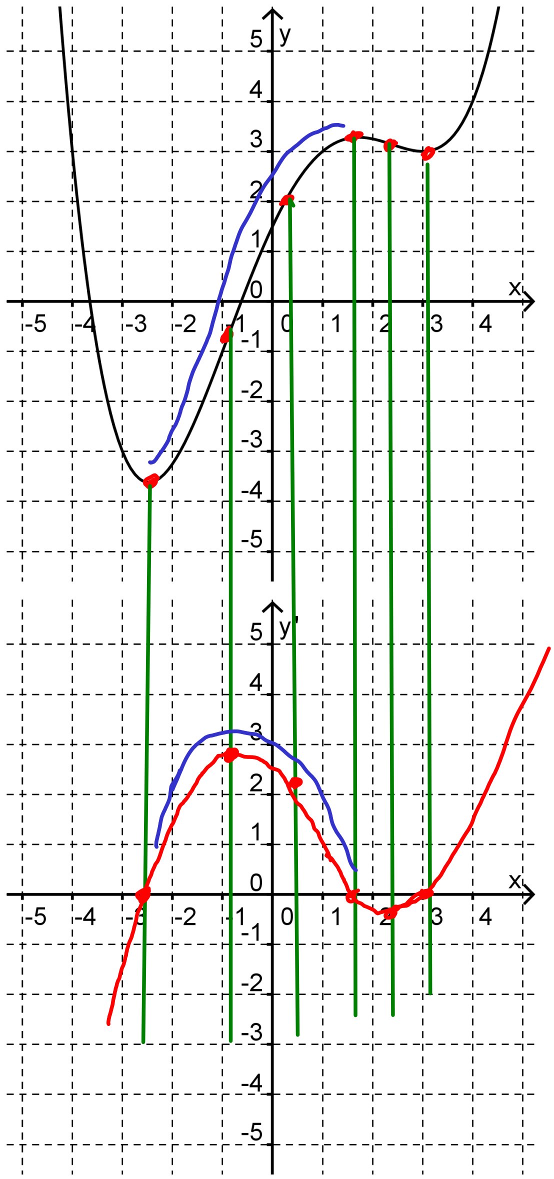
b) $y = \frac{x^5}{5} + \frac{5}{x^5} - \frac{5^5}{\sqrt[5]{x}}$ $y' = x^4 - 25x^{-6} + \underbrace{\frac{1}{5} \cdot 5^5}_{5^4 = 625} \cdot x^{-\frac{6}{5}}$

2.3. Grafisches Ableiten

1. **Verfahren und Vorgehen**

   Gegeben sind die Graphen verschiedener Funktionen. Wir skizzieren die Ableitung in das darunter liegende Koordinatensystem.





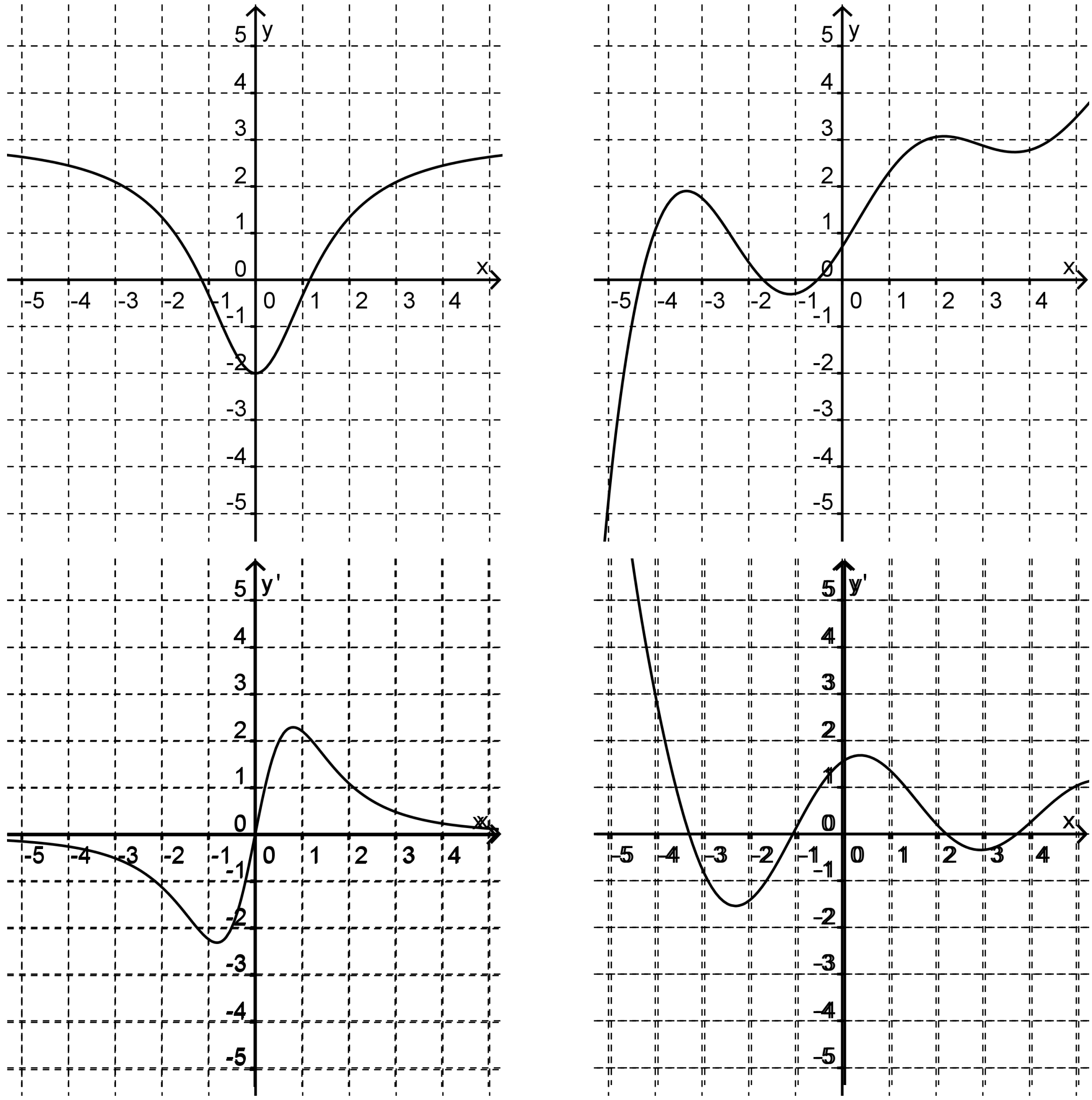
2. **Nützliche Hinweise für eine qualitativ gute Skizze**

   Steigende und fallende Kurventeile: Kurve steigend ⇒ y' > 0 ⇒ y' oberhalb der x-Achse, Kurve fallend ⇒ y' unterhalb x-Achse

   Sehr steile gegenüber eher flachen Kurventeilen. y' nahe an der x-Achse
   ↳ y' weit weg von der x-Achse (günstig: steilste Pkt)

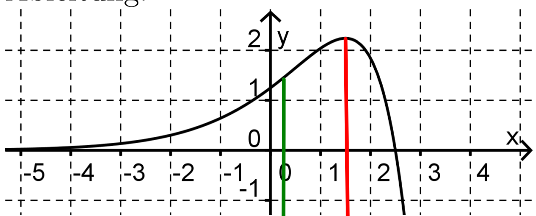
   Hoch- und Tiefpunkte (lokale Maxima und Minima)
   y' = 0 (y' geht durch die x-Achse)

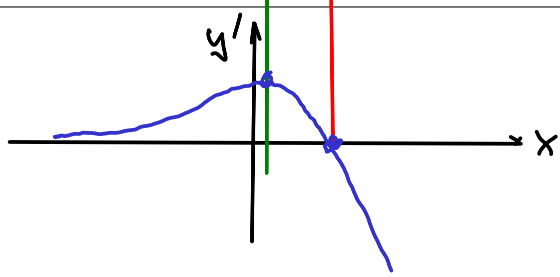
3. **Übung**



Freiwillige Zusatzübung

Zeichne die Kurve sinngemäss ab und bestimme grafisch die erste Ableitung.





2.4. Zweite und höhere Ableitungen

1. **Bemerkung**

   Die erste Ableitung einer Kurve ist (wie inzwischen bekannt) selber wieder eine Funktion. Diese erste Ableitung beschreibt die Steigung, d.h. die momentane Änderung der Kurve.
   Wir leiten nun diese Ableitungsfunktion noch einmal ab und erhalten so die zweite Ableitung.
   Die zweite Ableitung ist also die Ableitung der Steigungsfunktion. Sie beschreibt somit, wie sich die Steigung einer Kurve verändert. Selbstverständlich kann man von einer Funktion auch die dritte, vierte etc. Ableitung bestimmen. Allerdings haben diese kaum praktische Bedeutung.

2. **Physikalisches**

   Die erste Ableitung einer Bewegung ist die Geschwindigkeit. Die zweite Ableitung beschreibt somit die Änderung der Geschwindigkeit.

   → Beschleunigung

3. **Übungen**

   Leite zweimal ab:

   a) $y = f(x) = 2x^3 - 4x + 7$

   b) $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$

   c) $y = f(x) = \dfrac{5}{x^5} = 5 \cdot x^{-5}$

   d) $y = f(x) = \dfrac{4}{\sqrt[4]{x}} = 4 \cdot x^{-\frac{1}{4}}$

a) $y' = 6x^2 - 4$ $y'' = 12x$

b) $y' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$ $y'' = -\frac{2}{9} x^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3} x^{-\frac{5}{3}}\right)$

c) $y' = -25 x^{-6}$ $y'' = 150 x^{-7}$

d) $y' = - x^{-\frac{5}{4}}$ $y'' = \frac{5}{4} x^{-\frac{9}{4}}$

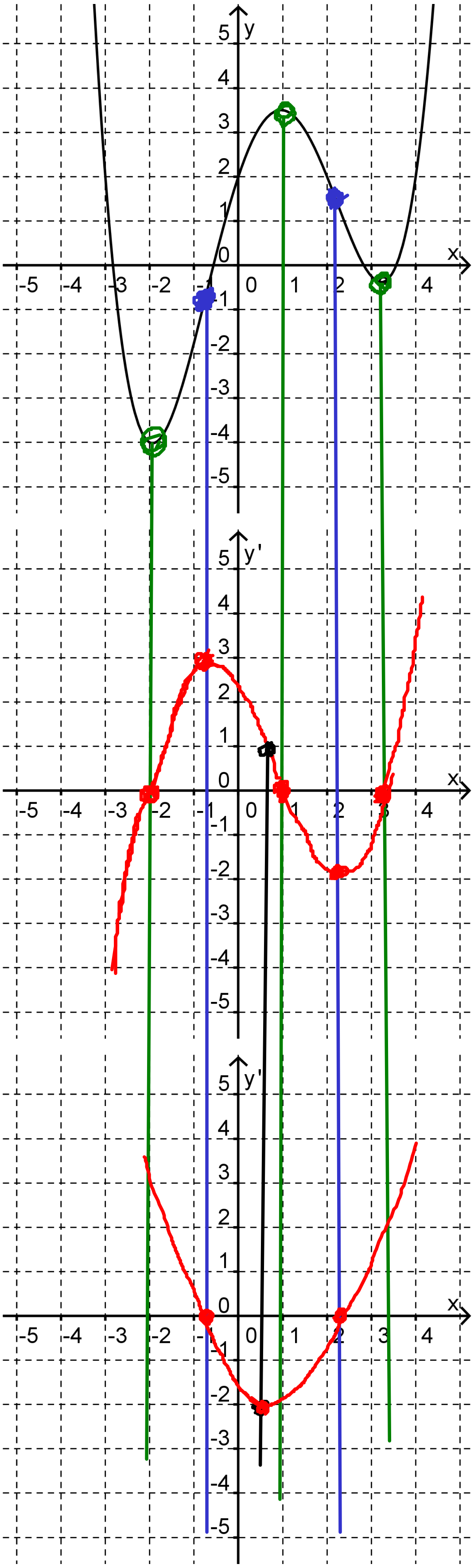
Lernkontrolle

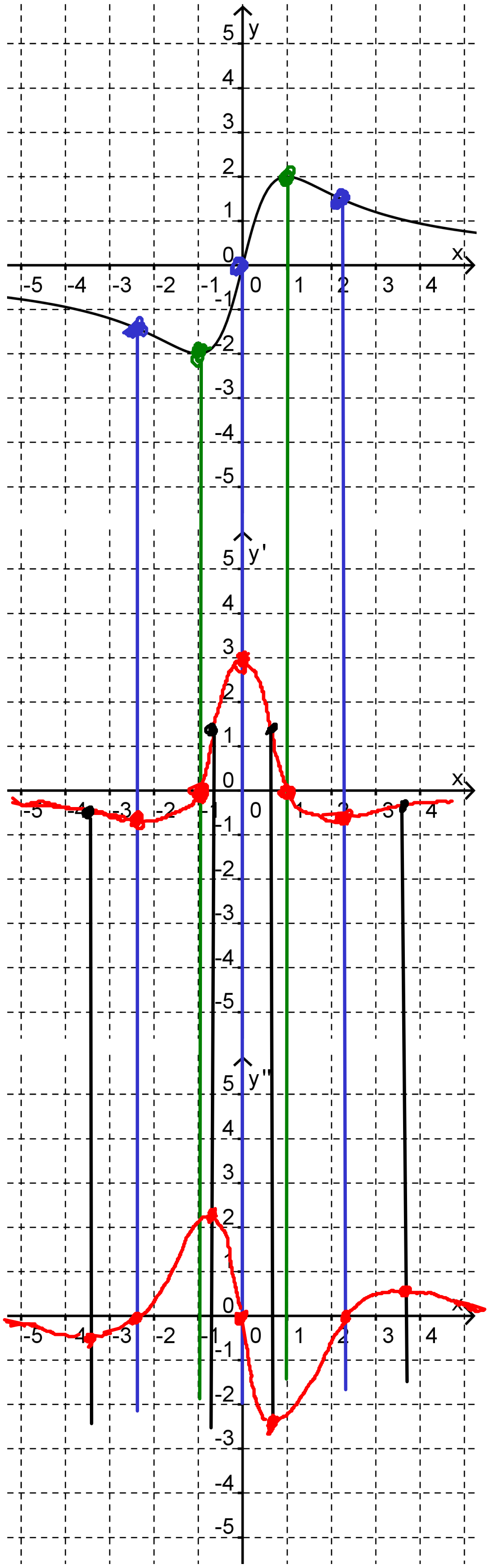
Leite zweimal ab: $y = f(x) = \dfrac{x^6}{6} - \dfrac{6}{x^6} + \sqrt[6]{x} - 6x = \frac{1}{6} x^6 - 6x^{-6} + x^{\frac{1}{6}} - 6x$

$y' = x^5 + 36x^{-7} + \frac{1}{6} x^{-\frac{5}{6}} - 6$

$y'' = 5x^4 - 252 x^{-8} - \frac{5}{36} x^{-\frac{11}{6}}$

4. **Leite grafisch zweimal ab**



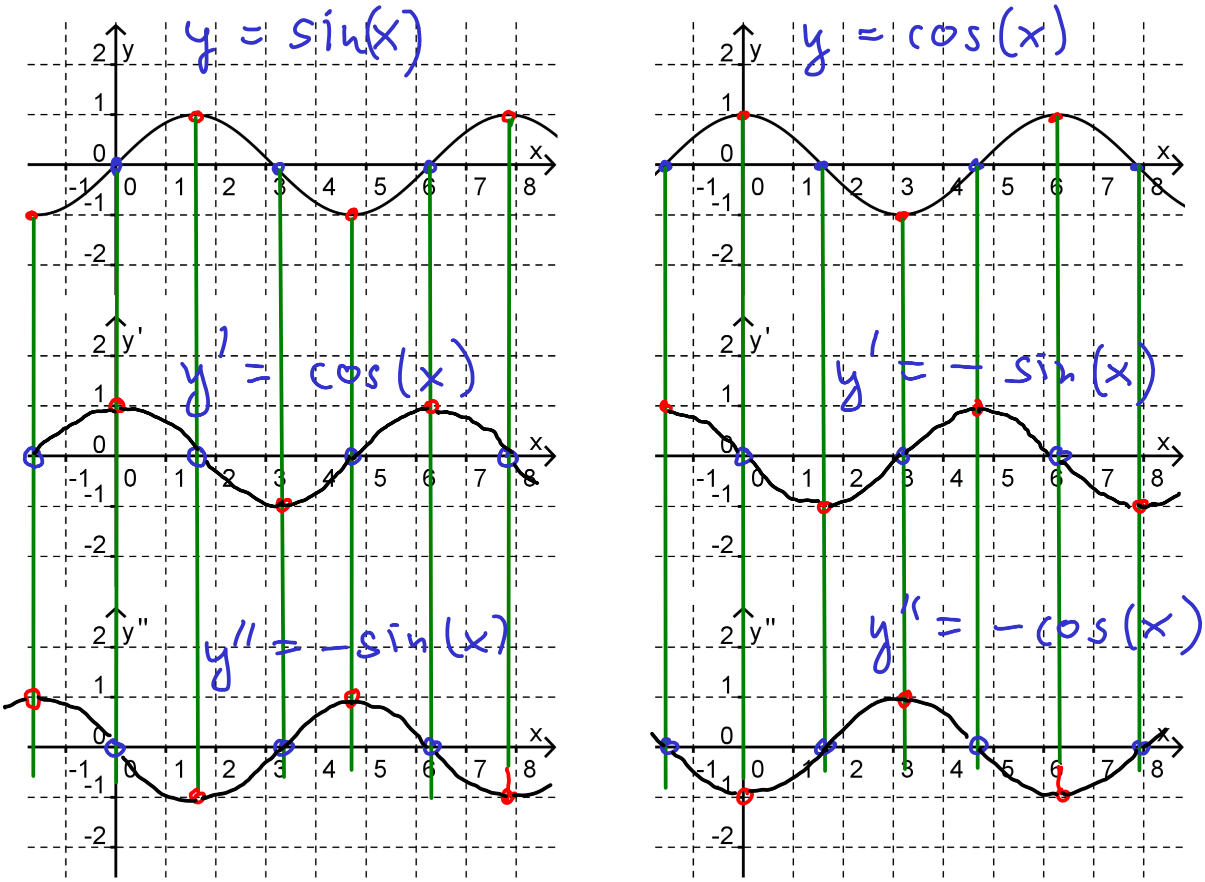


2.5. Ableiten von Sinus und Cosinus

1. **Bemerkung**

   Die mathematisch genaue Herleitung der Ableitungen der trigonometrischen Funktionen erfordert einige Kenntnisse und erfolgt daher hier nicht.
   Wir können aber die Ableitungen von Sinus und Cosinus grafisch durchführen und so das Ergebnis plausibel machen.

2. **Herleitung**



3. **Satz**

$$[\sin(x)]' = \cos(x)$$
$$[\cos(x)]' = -\sin(x)$$