Bruchtermgleichungen mit Parametern

Studium

In diesem Text wird ein Beispiel ausführlich besprochen und gleichzeitig werden die wichtigen Theorieteile dazu zusammengefasst. Der Text dient also zur Repetition.

1) Aufgabe

Gegeben ist die Gleichung $\frac{x-1}{x+1} = \frac{x-a}{x+3}$. Gesucht ist x (in Abhängigkeit von a)

2) Auflösen (Normalfall)

Wir lösen nach dem allgemeinen Schema, indem wir zuerst beide Seiten der Gleichung mit dem Hauptnenner – und der ist $(x + 1)(x + 3)$ – multiplizieren.

Das ergibt zunächst die Gleichung: $(x - 1)(x + 3) = (x - a)(x + 1)$

Dann multiplizieren wir aus $x^2 + 2x - 3 = x^2 - ax + x - a$

und ordnen nach x. $x + ax = 3 - a$

Dann klammern wir x aus $x(1 + a) = 3 - a$ (*)

und dividieren schliesslich durch $(a + 1)$.

Im **Normalfall** gilt also: $x = \frac{3-a}{1+a}$. (**)

3) Sonderfälle (allgemeine Betrachtung)

Für die Sonderfälle betrachten wir die vorkommenden Nenner und fragen uns, ob es für gewisse Parameterwerte (also Werte für a) sein kann, dass ein Nenner = 0 wird. Für jeden dieser Fälle müsste man theoretisch den gefundenen Wert a in der gegebenen Gleichung (Punkt 1) einsetzen und diese Gleichung lösen, nur geht es meist schneller.
Es kommen drei Nenner vor:
In der Gleichung (**) hat man den Nenner $1 + a$ (siehe dazu Punkt 4).
In der gegebenen Gleichung gibt es zwei Nenner: $x + 3$ (Punkt 5) und $x + 1$ (Punkt 6).

4) Sonderfall I

Der Nenner $1 + a$ wird dann = 0, wenn $a = -1$ ist.
Jetzt kann man diesen Wert in die ursprüngliche Gleichung einsetzen und diese lösen. Man sieht nach einiger Rechnung, dass die Gleichung unerfüllbar ist, dass also L = {}.
Kürzer ist der folgende Gedanke. Bis zur Gleichung (*) verläuft der Lösungsweg für alle Parameterwerte gleich, also kann man $a = -1$ in die Gleichung (*) einsetzen, erhält $0 = 4$ und sofort L = {}, weil die Gleichung $0 = 4$ *unerfüllbar* ist.

5) Sonderfall II

$x + 3$ wird dann = 0, wenn das berechnete $x = -3$ wird.
Wir fragen also, ob es einen Parameterwert a gibt, für den $x = -3$ wird.

Dazu setzen wir in der Gleichung (**) $x = -3$ ein. Das ergibt $-3 = \frac{3-a}{1+a}$.

Auflösen nach a ergibt zunächst $-3 - 3a = 3 - a$, also $-6 = 2a$ und somit $-3 = a$.
Für $a = -3$ wäre also $x = -3$ und das ist *Scheinlösung*, somit folgt für $a = -3 \Rightarrow$ L = {}.

Man beachte: Die Fälle bei Punkt 4) und Punkt 5) sind *wesentlich verschieden*.
Wenn $a = -1$ ist, folgt L = {}, weil eine *unerfüllbare* Gleichung entsteht;
für den Parameterwert $a = -3$ folgt L = {}, weil eine *Scheinlösung* entsteht.

6) Sonderfall III

$x + 1$ wird dann $= 0$, wenn das berechnete $x = -1$ wird.
Wir fragen also, ob es einen Parameterwert a gibt, für den $x = -1$ wird.
Wie bei Punkt 5) setzen wir in der Gleichung (**) $x = -1$ ein. Das ergibt $-1 = \frac{3-a}{1+a}$.
Auflösen nach a ergibt $-1 - a = 3 - a$ und somit $0 = 4$. Diese Gleichung ist unerfüllbar.
D. h. es gibt keinen Parameterwert a so, dass $x = -1$ wird.
Also kann dieser Sonderfall gar nie auftreten.

7) Zusammenfassung

Für $a = -1$ folgt $L = \{\}$, für $a = -3$ ist ebenfalls $L = \{\}$
und in allen andern Fällen (d.h. für alle andern Werte von a) gilt $x = \frac{3-a}{1+a}$.
Damit ist dieses Beispiel vollständig gelöst.

8) Zusatzbemerkung (Sonderfall IV)

Ein Sonderfall kommt in unserem Beispiel nicht vor: es könnte sein, dass für einen Parameterwert die entstehende Gleichung allgemein gültig wird. Das entspricht Punkt 4), aber die entstehende Gleichung heisst zum Schluss beispielsweise $0 = 0$.
In diesem Fall wird $L = R \setminus \{ ... \}$, wobei in der Mengenklammer die Scheinlösungen ausgeschlossen werden müssen.
Die Berechnung für diesen Sonderfall verlaufen also im Wesentlichen gleich wie bei Punkt 4).

****