Division von Brüchen

Studium

Studiere den folgenden Text genau. Wenn du fertig gelesen hast, solltest du begriffen und verstanden haben, wie man Brüche dividiert, d.h. wie man also beispielsweise $\frac{2}{3} : \frac{5}{7}$ rechnet.

---

1. Aufgabe: 12 : 4 = ?

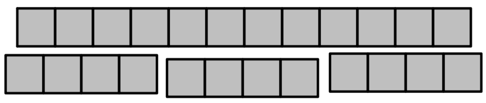
Dass das Ergebnis 12 : 4 = 3 gibt, ist dir schon lange klar. Du erhältst jetzt vier anschauliche Begründungen, die wir nachher für die schwierigeren Beispiele verwenden.

a) Angenommen, wir haben 12 Kuchen. Wenn wir diese 12 Kuchen auf 4 Personen verteilen müssen, dann erhält jede Person – logischerweise – drei Kuchen. Wir lesen die Rechnung "Zwölf durch vier ergibt drei." Manchmal lernen Schüler in der Primarschule eine Formulierung der Art "Zwölf verteilt an vier ergibt drei." kennen. Diese Formulierung ist richtig, funktioniert aber nicht mehr gut, wenn wir wie im Eingangsbeispiel "zwei Drittel" auf "fünf Siebtel" verteilen müssten.

b) Für eine zweite Begründung kehren wir die Rechnung um. 12 : 4 = 3, weil 3 · 4 = 12 ist. 12 : 4 = ? heisst so viel wie: "Suche eine Zahl, welche mit 4 multipliziert wieder 12 ergibt". Das Ergebnis ist natürlich die gesuchte 3.

c) 12 : 4 können wir auch einfach auf einen Bruchstrich schreiben. 12 ist der Zähler, 4 der Nenner. Und wenn wir dann kürzen erhalten wir sofort $\frac{12}{4} = 3$.

d) Wir denken uns einen Papierstreifen von 12 Häuschen Breite. Dann können wir einen kleineren Streifen von 4 Häuschen Breite genau 3-mal im grösseren Streifen versorgen. 4 Häuschen haben also in 12 Häuschen genau 3-mal Platz.
Das Ergebnis ist also die gesuchte Anzahl, wie oft der Divisor im Dividenden Platz hat.



2. Aufgabe: 9 : 6 = ?

Diese Aufgabe sollte dir noch nicht allzu schwer fallen. Das Ergebnis ist $\frac{3}{2}$.

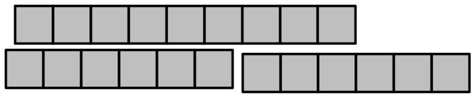
Lies nun aber die verschiedenen anschaulichen Begründungen durch.

a) Die Methode mit den Kuchen: Wenn wir 9 Kuchen auf 6 Personen verteilen müssen, dann gibt es für jede Person einen ganzen und einen halben Kuchen. Das Ergebnis ist also $\frac{3}{2}$.

b) Die Rechnung umkehren: Mit wie viel müssen wir 6 multiplizieren, um 9 zu erhalten? Wenn wir alles schön auf einen Bruchstrich schreiben, sehen wir: $6 \cdot \frac{3}{2} = \frac{6}{1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{1} = 9$.

c) Die dritte Methode ist hier die einfachste: $\frac{9}{6}$ schreiben und kürzen. Wir erhalten $\frac{3}{2}$.

d) In einem Papierstreifen von 9 Häuschen Breite (das ist der Dividend) hat ein Streifen von 6 Häuschen Breite (das ist der Divisor) einmal ganz und einmal halb Platz.



3. Aufgabe: $\frac{14}{25}$: 7 = ?

Das Ergebnis dieser Rechnung ist $\frac{2}{25}$. Vielleicht ist dir das klar, vielleicht noch nicht ganz.

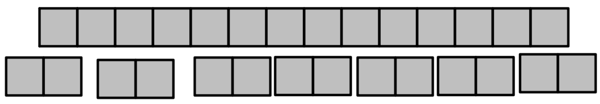
Wir betrachten wieder die vier Begründungen:

a) Die Methode mit den Kuchen funktioniert immer noch: 14 Kuchen auf 7 Personen verteilen ergibt 2 Kuchen pro Person. Jetzt musst du aber nicht 14 ganze Kuchen verteilen, sondern quasi 14 Fünfundzwanzigstel. Und 14 Fünfundzwanzigstel dividieren durch 7 gibt eben 2 Fünfundzwanzigstel.

b) Die Rechnung umkehren heisst jetzt: 7 mit einem Bruch multiplizieren, so dass wir $\frac{14}{25}$ erhalten. Wenn wir alles aufschreiben, sehen wir: $\frac{7}{1}\cdot\frac{2}{25}=\frac{14}{25}$. Also waren $\frac{2}{25}$ gesucht.

c) Die Methode, alles auf einen Bruchstrich zu schreiben, funktioniert nicht mehr so gut, denn was ist $\frac{14/25}{7}$? Vielleicht hast du aber gemerkt, dass wir auch einfach die 14 durch 7 teilen können. Das ist gut, aber nur, wenn die Rechnung schön aufgeht.

d) Wenn ich einen Papierstreifen von $\frac{14}{25}$ Breite in 7 gleiche Teile aufteile, dann ist jeder der neu entstehenden Teile genau $\frac{2}{25}$ breit. Jedes Häuschen in der Figur steht jetzt also für einen Fünfundzwanzigstel.



4. Aufgabe: $\frac{2}{3}$: 5 = ?

Das ergibt $\frac{2}{15}$, aber weshalb wohl? Lies wieder genau.

a) Wenn wir zwei Drittel von einem Kuchen auf 5 Personen verteilen müssten, dann denken wir uns den Kuchen in ganz kleine Stücke zerschnitten, indem wir jedes Kuchendrittel in 5 gleich grosse Teile zerschneiden. Die sind dann jeweils ein Fünfzehntel vom ganzen Kuchen. Somit erhält jede Person zwei Fünfzehntel vom Kuchen.

b) Die Rechnung umkehren heisst jetzt: 5 mit einem Bruch multiplizieren, damit als Ergebnis $\frac{2}{3}$ entsteht. In Zeichen: $5\cdot\frac{\text{Zähler fehlt}}{\text{Nenner fehlt}}=\frac{2}{3}$. Dieser fehlende Bruch muss im Zähler eine 2 haben, damit diese 2 im Ergebnis erscheint. Ebenso brauchen wir im Nenner eine 3. Damit wir die 5 wegkürzen können, müssen wir im Nenner den Faktor 5 einbauen. Wir haben also im Zähler eine 2 und im Nenner $3 \cdot 5$. Das macht $\frac{2}{15}$.

Hier ist die Rechnung noch ausgeschrieben: $5\cdot\frac{2}{3\cdot 5}=\frac{5}{1}\cdot\frac{2}{15}=\frac{2}{3}$

c) Bei der Methode, alles auf einen Bruchstrich zu schreiben, gibt es nun das Problem, dass 2 durch 5 nicht aufgeht. Der nächste Gedanke ist wichtig: Wir können aber die 5 in den Nenner schreiben und dort multiplizieren. Also so: $\frac{2}{3}:5=\frac{2}{3\cdot 5}=\frac{2}{15}$. Oder noch anders formuliert: Statt durch 5 zu dividieren, können wir mit $\frac{1}{5}$ multiplizieren. Wir erhalten:

$\frac{2}{3} : 5 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$. Dieser letzte Gedanke war ganz wichtig: Eine Division durch 5 ist dasselbe wie eine Multiplikation mit $\frac{1}{5}$.

d) Die Methode mit den Papierstreifen bringt bei diesem Beispiel keine neuen Erkenntnisse.

5. Aufgabe: $\frac{9}{10} : \frac{3}{5} = ?$

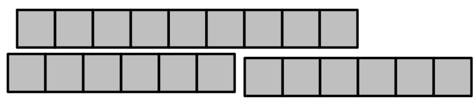
Damit kommen wir dem Ziel einen grossen Schritt näher. Die Rechnung ergibt $\frac{3}{2}$.

a) Mit der Anschauung, 9 Zehntel von einem Kuchen auf "drei Fünftel" Personen zu verteilen, kommen wir jetzt nicht mehr weiter.

b) Die Rechnung umzudrehen, macht jetzt aber viel Sinn. Mit welcher Zahl müssen wir $\frac{3}{5}$ multiplizieren, um $\frac{9}{10}$ zu erhalten? Also so: $\frac{3}{5} \cdot \frac{\text{Zähler fehlt}}{\text{Nenner fehlt}} = \frac{9}{10}$. Wir sehen sofort, dass im Zähler zum – schon vorhandenen – Faktor 3 nur noch ein weiterer Faktor 3 fehlt, um die 9 zu erhalten. Im Nenner fehlt nur der Faktor 2. Also haben wir das Ergebnis $\frac{3}{2}$ bereits.
Hier der Vollständigkeit halber die ganze Rechnung: $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{10}$.

c) Alles auf einen Bruchstrich zu schreiben, nützt uns hier nicht viel.

d) Hingegen können wir uns einen Streifen der Breite $\frac{9}{10}$ aufzeichnen und uns fragen, wie oft ein kleinerer Streifen der Breite $\frac{3}{5}$ darin Platz hat. In der Figur misst jetzt jedes Häuschen genau einen Zehntel. Der grosse Streifen misst 9 Häuschen, die kleineren jeweils 6 Häuschen, denn $\frac{3}{5}$ ist gleich viel wie $\frac{6}{10}$. Dann sehen wir, dass wir genau ein ganzes und ein halbes Mal den kleinen Streifen im grösseren Streifen unterbringen können. Das begründet das Ergebnis von $\frac{3}{2}$.



6. Aufgabe: $\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = ?$

Mit diesem Beispiel erreichen wir das Ziel. Die Rechnung ergibt $\frac{14}{15}$. Aber weshalb?

a) Die Methode mit den Kuchen funktioniert endgültig nicht mehr.

b) Wenn wir die Rechnung umdrehen und uns also fragen, mit welcher Zahl wir $\frac{5}{7}$ multiplizieren müssen, um $\frac{2}{3}$ zu erhalten, dann haben wir folgende Rechnung: $\frac{5}{7} \cdot \frac{\text{Zähler fehlt}}{\text{Nenner fehlt}} = \frac{2}{3}$. Der fehlende Bruch benötigt im Zähler sicher die Faktoren 2 und 7. Die 2 muss fürs Ergebnis dazukommen, die 7 muss sich wegkürzen. Im fehlenden Nenner brauchen wir entsprechend die Faktoren 3 und 5. Die 3 kommt fürs Ergebnis dazu, die 5 kürzt sich dann weg. Also so: $\frac{5}{7} \cdot \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} = \frac{5}{7} \cdot \frac{14}{15} = \frac{2}{3}$.

Wir sehen das Ergebnis für den fehlenden Bruch und somit für unsere Aufgabe: $\frac{14}{15}$.

c) Wir haben vorher erkannt, dass das Ergebnis $\frac{14}{15} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5}$ ist. Der letzte Ausdruck ist nun der entscheidende. Wenn wir $\frac{2}{3}$ durch $\frac{5}{7}$ dividieren müssen, dann können wir auch $\frac{2}{3}$ mit $\frac{7}{5}$ multiplizieren und erhalten das Ergebnis.

Wir müssen also den Dividenden stehen lassen und beim Divisor Zähler und Nenner vertauschen.

Wenn wir bei einem Bruch Zähler und Nenner vertauschen, dann erhalten wir den so genannten Kehrwert (oder Kehrbruch oder reziproken Wert oder reziproken Bruch).

Der Kehrwert von $\frac{5}{7}$ ist also $\frac{7}{5}$. (Übrigens gilt im Beispiel 4: Der Kehrwert von 5 ist $\frac{1}{5}$.)

Somit kommen wir zum wichtigen Satz:

Brüche werden dividiert, indem man den Dividenden mit dem Kehrwert des Divisors multipliziert.

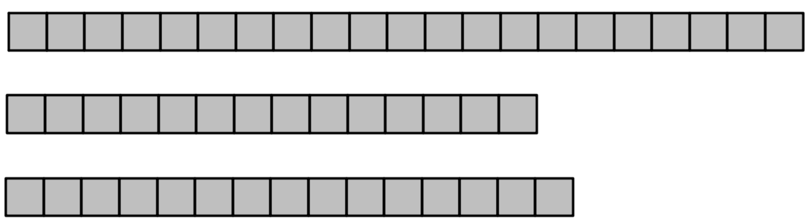
d) Die anschauliche Version mit einem Häuschenstreifen funktioniert immer noch und liefert eine sehr schöne Illustration der Rechnung.

Jedes Häuschen ist jetzt $\frac{1}{21}$. Der oberste, ganze Streifen hat also genau Breite 1.

$\frac{2}{3}$ sind somit 14 Häuschen. Die waren gegeben, von denen gehen wir aus.

$\frac{5}{7}$ sind jetzt 15 Häuschen. Die suchen wir eigentlich.

Somit haben wir 14 Häuschen, suchen aber 15 Häuschen. Also haben wir $\frac{14}{15}$.



Wenn dir dieses letzte Beispiel mit allen Erläuterungen klar war, dann hast du die Division von Brüchen begriffen.

****