

3. Rationale Zahlen

3.1. Kürzen, erweitern und gleichnamig machen von Brüchen

1) Bemerkung

Die Addition, Subtraktion und Multiplikation ist innerhalb der ganzen Zahlen abgeschlossen, d.h. wenn man zwei ganze Zahlen addiert, subtrahiert oder multipliziert, dann wird das Ergebnis immer auch eine ganze Zahl sein.

Diese Eigenschaft gilt für eine Division nicht mehr in jedem Fall. Daher definieren wir die rationalen Zahlen.

2) Definition

.....

3) Beispiele

Rationale Zahlen:

a) alle natürlichen und ganzen Zahlen:

b) alle Zahlen, die man als Brüche schreiben kann:

.....

c) Beispiele von Zahlen, die nicht rational sind:

4) Kürzen

.....

5) Beispiele

a) $\frac{25}{40} =$

b) $\frac{42}{90} =$

c) $\frac{24}{15} =$

d) $\frac{54}{9} =$

e) $-\frac{40}{56} =$

f) $-\frac{160}{50} =$

6) Welche Brüche haben den gleichen Wert?

$\frac{21}{14}, \frac{24}{18}, \frac{6}{4}, \frac{51}{34}, \frac{99}{66}$

7) Erweitern

.....

8) Erweitere auf den Nenner 48

$\frac{7}{4}, \frac{23}{12}, \frac{9}{8}, \frac{51}{24}, \frac{2}{3}$

9) Gleichnamig machen

.....

.....

.....

.....

10) Beispiele

Mache die Brüche gleichnamig

a) $\frac{12}{25}$ und $\frac{14}{15}$

b) $-\frac{2}{3}$ und $\frac{9}{8}$

11) Ordne die Brüche der Grösse nachVerwende das Zeichen $<$.

$$\frac{11}{18} \quad \frac{5}{9} \quad \frac{7}{12} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{19}{36}$$

12) Überlegungsaufgabe

Welcher Bruch ist grösser?

a) $\frac{7}{9}$ oder $\frac{7}{11}$?

b) $\frac{23}{25}$ oder $\frac{17}{15}$?

c) $\frac{2}{135}$ oder $-\frac{141}{151}$?

d) $-\frac{1}{3}$ oder $-\frac{1}{4}$?

13) Kleine Knacknuss

Welche Werte darf der Zähler x annehmen, damit die Ungleichung erfüllt wird?

a) $\frac{x}{12} > \frac{7}{5}$

b) $\frac{2}{3} \leq \frac{x}{24} < \frac{3}{2}$

14) Freiwillige ÜbungGegeben sind zunächst vier Brüche, nämlich $\frac{23}{15}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{37}{24}$ und $\frac{9}{5}$

a) Ordne sie der Grösse nach.

b) Welchen Wert muss der Zähler x im Bruch $\frac{x}{7}$ haben, damit er bezogen auf die Grösse in die Mitte der Bruchreihe passt, die man dann aus allen fünf Brüchen bilden kann?

3.2. Addition und Subtraktion

1) Gleichnamige Brüche

$$\frac{5}{14} + \frac{3}{14} =$$

.....

.....

2) Nicht gleichnamige Brüche

$$\frac{5}{6} + \frac{3}{10} =$$

3) Satz

.....

.....

.....

.....

4) Summen und Differenzen

$$\text{a) } \frac{3}{4} + \frac{5}{6} =$$

$$\text{b) } \frac{3}{5} + \frac{5}{4} + \frac{1}{2} =$$

$$\text{c) } \frac{7}{9} - \frac{5}{3} =$$

5) Berechne

$$\text{a) } \frac{2}{3} + \frac{1}{6} - \frac{7}{12} =$$

$$\text{b) } 3 - \frac{1}{3} - \frac{3}{4} =$$

$$\text{c) } \frac{1}{2} + 2 - \frac{3}{4} - \frac{7}{12} =$$

6) Negative Zahlen

$$\text{a) } \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{5}{3}\right) - \frac{1}{4} =$$

$$\text{b) } -\frac{1}{3} - \left(-\frac{2}{5}\right) - \left(-\frac{4}{15}\right) =$$

7) Klammern

$$\text{a) } \frac{1}{3} - \left(\frac{8}{5} - \frac{1}{2}\right) =$$

$$\text{b) } \frac{4}{9} - \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{6}\right) =$$

$$\text{c) } \frac{5}{8} - \left(\frac{2}{5} - \left(\frac{3}{4} - \frac{7}{10}\right) + \frac{1}{2}\right) - 1 =$$

8) Freiwillige Übung

$$\text{a) } \frac{5}{8} - \frac{4}{3} =$$

$$\text{b) } \frac{5}{8} - \left(-\frac{4}{3}\right) =$$

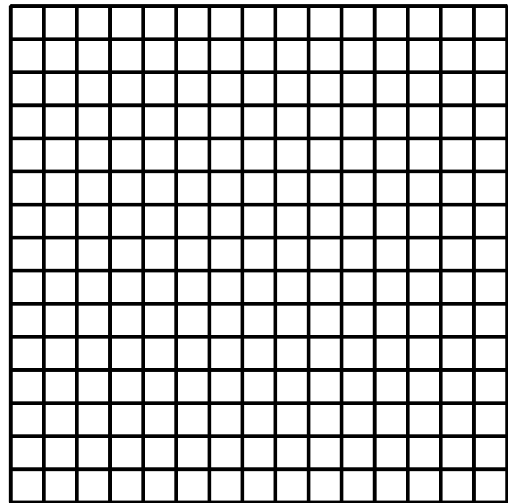
$$\text{c) } \frac{1}{4} - \left(\frac{5}{6} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)\right) + 2 =$$

3.3. Multiplikation

1) Beispiel

Wie viel ist $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$?

Zur Begründung betrachten wir ein Quadrat von 15×15 Häuschen und erhalten



.....

2) Bemerkung

Wenn man zwei Drittel **von** vier Fünfteln berechnet, führt man genau genommen eine Multiplikation durch.

3) Satz

.....

4) Musterbeispiele

a) $\frac{25}{12} \cdot \frac{4}{5} =$

b) $\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{21} \cdot \frac{7}{13} =$

c) $\left(-\frac{5}{9}\right) \cdot \left(-\frac{3}{10}\right) \cdot \left(-\frac{14}{11}\right) =$

d) $3 \cdot \frac{7}{5} =$

5) Summen, Produkte und Klammern

Denk an das KLAPOPUSTRI

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} - \frac{5}{6} =$

b) $\frac{5}{8} \cdot \left[\frac{1}{3} - \left(-\frac{5}{6}\right) \right] =$

c) $\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) =$

6) Potenzen

$\left(\frac{2}{3}\right)^3 =$

7) Übung

a) $\frac{5}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 =$

b) $\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\right)^2 =$

c) $\frac{5}{6} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 =$

8) "Meisterstück"

$$\frac{2}{3} \cdot \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{5}{6}\right) \cdot \left(\frac{2}{5} - 2\right) + \frac{1}{3} \right] \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$$

9) Freiwillige Übung

a) $\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{7}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) =$

b) $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8} - \left(2 + \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\right)^2\right) =$

c) $\frac{3}{5} - \left(\frac{5}{6} - 2\right) \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{10}\right) =$

d) $\frac{5}{3} - 3 \cdot \left(\frac{5}{2} - \frac{7}{6}\right)^2 =$

3.4. Division

1) Studium

Als Einstieg in dieses Kapitel gibt es einen Text zu studieren

2) Definition

.....

3) Satz

.....

4) Beispiele

$$\text{a) } \frac{3}{4} : \frac{2}{5} =$$

$$\text{b) } \frac{5}{8} : 15 =$$

$$\text{c) } \frac{4}{9} : \left(-\frac{5}{6}\right) =$$

$$\text{d) } \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) : \left(-\frac{5}{6}\right) =$$

$$\text{e) } \frac{3}{4} : \left(\frac{2}{3}\right)^2 =$$

$$\text{f) } \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{12}\right) : \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{3}\right) =$$

5) Doppelbrüche

Was ist genau mit dem Bruch rechts aussen gemeint?

$$\frac{21}{\frac{31}{41}}$$

.....
 Ein Doppelbruch ist also nichts anderes als eine umgeschriebene Division.

6) Beispiele

$$\text{a) } \frac{\frac{4}{7}}{\frac{3}{5}} =$$

$$\text{b) } \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}} =$$

$$\text{c) } \frac{\frac{2}{3} - 1}{2 - \frac{4}{5}} =$$

7) "all inclusive"

$$\text{a) } \frac{2}{3} : \frac{3}{4} - \frac{5}{6} : \left(\frac{2}{5} - 1\right) + \left(\frac{1}{3} : \frac{2}{3}\right)^2 =$$

$$\text{b) } \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{3} - 3\right) - \frac{3}{5} : \left(\frac{3}{20} - \frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{3}{2}\right)^2 =$$

8) "Königsaufgabe"

$$\frac{\frac{1}{4} - \frac{5}{6} : \left(\frac{2}{5} - 1\right) + \frac{1}{3}}{\frac{1}{4} \cdot \frac{12}{5} : \frac{2}{5} - 1 : \frac{1}{3}} =$$

9) Freiwillige Übung

Diese Aufgaben stammen aus früheren Prüfungen

$$\text{a) } \frac{\frac{1}{3} + 2 \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{7}{10}\right)}{\frac{1}{2} - \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{5}\right)} =$$

$$\text{b) } \frac{\frac{1}{2} - \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{3}{5} - 2\right) + \frac{1}{8}}{\frac{4}{9} - \frac{7}{6} \cdot \frac{4}{7} - 2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} =$$

$$\text{c) } \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{10}\right)^2 - \left(\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right)\right) \cdot 3 =$$