Grundaufgaben der Differentialrechnung

Ein Leitprogramm

Oliver Riesen, Kantonsschule Zug

Liebe Schülerin, lieber Schüler

Die Blätter, die du jetzt gerade zu lesen begonnen hast, sind ein sogenanntes Leitprogramm. In einem Leitprogramm wirst du durch ein (mathematisches) Thema geführt (eben: geleitet).

In einem Leitprogramm kannst du dein Arbeitstempo selbst bestimmen. Wenn dir also ein Thema, eine Aufgabe sofort klar ist, dann kannst du rasch vorankommen. Wenn du bei einem Thema die Erklärungen langsamer und genauer lesen musst, dann hast du eben auch die Möglichkeit und Zeit dazu. Du kannst auch fortlaufend selbst kontrollieren, ob du ein Thema begriffen hast.

Bevor du jetzt mit der Arbeit beginnst, drei Bemerkungen:

a) Wenn du *kursiv gedruckten Text* vorfindest, dann enthält dieser Anleitungen zum Vorgehen.

b) Für die Arbeit benötigst du eigene Blätter oder ein Heft, denn du wirst Überlegungen notieren und Beispiele durchrechnen.
Fett gedruckter Text enthält wichtige (theoretische) Bemerkungen zu den Beispielen. Eine passende Notiz ins Heft ist empfehlenswert.

c) Das Leitprogramm ist auch auf Verwendung eines grafikfähigen Taschenrechners ausgelegt. Du solltest ihn für die Arbeit bereithalten. Sorge aber zu Beginn dafür, dass nichts unter irgendwelchen Variabeln gespeichert ist.

Nun geht es also richtig los. Ich wünsche dir viel Erfolg bei der Arbeit.

Zusammenstellung: Im Verlaufe dieses Leitprogramms löst du die folgenden 7 Aufgaben:

1) Steigung in einem Kurvenpunkt
Welche Steigung hat die Kurve $y = x^5 - x^3 - 5x$ im Punkt (2 | ...) ?

2) Punkte mit vorgegebener Kurvensteigung
In welchen Punkten hat die Kurve $y = 2x^3 - 9x^2 - 12x$ die Steigung $m = 12$?

3) Tangente in einem Kurvenpunkt bestimmen
Bestimme die Gleichung der Kurventangente im Punkt P(1 | ...) an die Kurve $y = x^4 - 2x$.

4) Schnittwinkel zweier Kurven
Die beiden Kurven $y = x^2 - x$ und $y = 6 - x^2$ schneiden sich in einem Punkt im ersten Quadranten. Bestimme in diesem Punkt den Schnittwinkel.

5) Berührung zweier Kurven
Zeige, dass sich die beiden Kurven $y = x^3 - x$ und $y = -x^2 + 15x - 20$ berühren.

6) Tangente von einem Punkt aus an eine Kurve legen
Bestimme eine Kurventangente an die Kurve $y = -x^2 + 4x$, welche durch P(0 | 1) geht.

7) Kurvennormale
Errichte im Punkt (3 | ...) der Kurve $y = x^2 - 3x + 2$ die Kurvennormale.

Aufgabe 1: Steigung in einem Kurvenpunkt

Welche Steigung hat die Kurve $y = x^5 – x^3 – 5x$ im Punkt (2 | ...) ?

Die folgende Anleitung gilt für alle Aufgaben:
Bevor du weiterliest, überlege dir zuerst, ob du die Aufgabe lösen kannst.
***Wenn dir die Lösung (oder zumindest der Lösungsweg) klar ist**, dann rechne die Aufgabe durch und vergleiche dein Ergebnis mit dem angegebenen Resultat. Du kannst dann deinen Lösungsweg noch mit der Musterlösung vergleichen.*
***Wenn dir nicht klar ist, wie du die Aufgabe lösen sollst**, dann lies weiter und arbeite die Musterlösung genau durch.*

Lösung zur Aufgabe 1: Die Steigung beträgt 63

Lösungsweg (Musterlösung) zur Aufgabe 1:
Wenn wir die vorgegebene x-Koordinate (x = 2) in die Funktionsgleichung einsetzen, erhalten wir y = 14 und somit lauten die vollständigen Koordinaten von P(2 | 14). Das kann nützlich sein, auch wenn man es für die Berechnung der Steigung nicht benötigt.

Wir berechnen zuerst die Ableitung $y' = 5x^4 – 3x^2 – 5$.
Wenn wir jetzt in dieser Gleichung x = 2 einsetzen, erhalten wir y' = 63. (Das war's.)

Aufgabe 2: Punkte mit vorgegebener Kurvensteigung

In welchen Punkten hat die Kurve $y = 2x^3 – 9x^2 – 12x$ die Steigung m = 12?

Lösung zur Aufgabe 2: In den Punkten (4 | –64) und (–1 | 1).

Lösungsweg (Musterlösung) zur Aufgabe 2:
Mit den Erklärungen aus der Aufgabe 1 müsste diese Aufgabe nicht mehr schwierig sein:

Wir berechnen die 1. Ableitung	$y' = 6x^2 – 18x – 12$
und setzen diese = 12.	$12 = 6x^2 – 18x – 12$
Die entstandene Gleichung lösen wir nach x auf.	$x_1 = –1,\ x_2 = 4.$

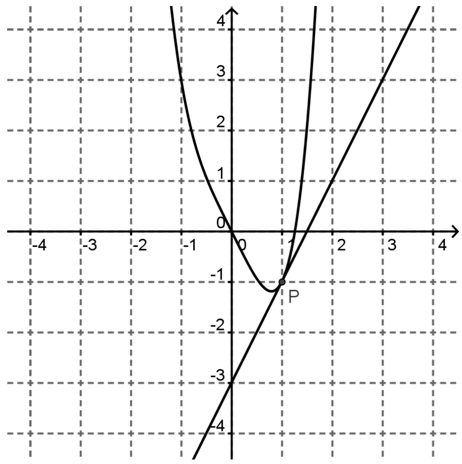
Diese x-Werte sind die x-Koordinaten der gesuchten Kurvenpunkte.
Die zugehörigen y-Werte erhalten wir, indem wir die x-Werte in die Funktionsgleichung einsetzen. Das ergibt $y_1 = 1$ bzw. $y_2 = –64$.
Somit sind die gesuchten Punkte (4 | –64) und (–1 | 1).

Aufgabe 3: Tangente in einem Kurvenpunkt bestimmen

Bestimme die Gleichung der Kurventangente im Punkt P(1 | ...) an die Kurve $y = x^4 – 2x$.

Lösung zur Aufgabe 3: $y = 2x – 3$

Lösungsweg (Musterlösung) zur Aufgabe 3:
Diese Aufgabe zerlegen wir in drei Schritte:



a) zuerst bestimmen wir die fehlende Koordinate des Punktes P. Dazu setzen wir x = 1 in die Funktionsgleichung ein.
   Das ergibt y = –1. Wir haben also P(1 | –1).

b) Jetzt leiten wir die Funktion ab. $y' = 4x^3 - 2$ und bestimmen die Steigung im Punkt P, d.h. an der Stelle x = 1.
   Das ergibt y'(1) = 2.
   Das ist also die Steigung der Kurve und gleichzeitig die Steigung der gesuchten Tangente.

c) Für die Tangente (jede Tangente ist eine Gerade!) machen wir den Ansatz $y = m \cdot x + v$.
   Bereits bekannt ist, dass m = 2 und somit haben wir y = 2x + v.
   Für das noch fehlende v beachten wir, dass P(1 | –1) auf der Tangente liegen muss.
   Wir setzen also die Koordinaten von P ein und erhalten aus der Gleichung $-1 = 2 \cdot 1 + v$ sofort v = –3.

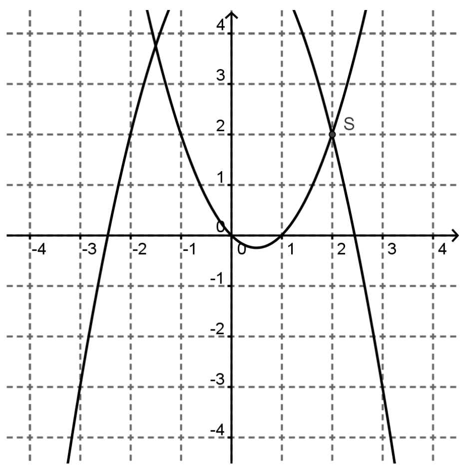
Die Gleichung der Tangente lautet also y = 2x – 3.

Aufgabe 4: Schnittwinkel zweier Kurven

Die beiden Kurven $y = x^2 - x$ und $y = 6 - x^2$ schneiden sich in einem Punkt im ersten Quadranten. Bestimme in diesem Punkt den Schnittwinkel.

Lösung zur Aufgabe 4: 147.529°

Lösungsweg (Musterlösung) zur Aufgabe 4:



Für dieses Beispiel betrachten wir zuerst die beiden Funktionskurven.

Damit wir den Schnittwinkel bestimmen können, benötigen wir zuerst die Schnittpunkte.
Wir setzen also die Funktionswerte gleich und erhalten $x_1 = 2$ sowie $x_2 = -3/2$.

Weil wir nur den Schnittwinkel im I. Quadranten berechnen, betrachten wir also x = 2. Das ist die x-Koordinate des Schnittpunktes.
Wenn wir x = 2 in die Funktionsgleichung von $f_1(x)$ oder von $f_2(x)$ einsetzen, erhalten wir y = 2.

Somit haben wir den Schnittpunkt S(2 | 2) vollständig bestimmt.

Kurze Zwischenbemerkung: Rein theoretisch benötigen wir zum Bestimmen des Schnittwinkels die y-Koordinate des Schnittpunktes nicht. (Aber der Aufwand dafür ist sehr klein.)

Jetzt berechnen wir $f_1'(x) = 2x – 1$, d.h. die Steigung von $f_1(x)$.
An der Stelle x = 2 (d.h. im Schnittpunkt) ist $f_1' = m_1 = 3$.
Die erste Kurve hat also im Schnittpunkt eine Steigung von 3.
Den Steigungswinkel erhalten wir aus der Gleichung $\tan(\alpha_1) = 3$ und das ergibt $\alpha_1 = 71.565°$.

Dasselbe machen wir nun nochmals, aber für die andere Kurve.
Wir berechnen $y_2'(x) = –2x$, dann setzen wir für den Schnittpunkt x = 2 ein.
Das gibt die Steigung $m_2 = –4$ und somit den Winkel $\alpha_2 = –75.964°$.

Die erste Kurve zeigt also mit 71.565° nach oben, die zweite Kurve mit 75.964° nach unten. Das gibt den Zwischenwinkel von 147.529°.

Bei dieser Aufgabe ist die Reihenfolge der Berechnungen wichtig: **Zuerst bestimmt man die x-Koordinate des Schnittpunktes, dann die beiden Steigungen, dann die beiden Winkel und erst am Schluss bestimmt man den Zwischenwinkel mit der Differenz $\alpha_1 – \alpha_2$.**

(Ein Zwischenwinkel ist immer durch eine Differenz erhältlich. Wenn das Ergebnis negativ wird, dann kann man das Vorzeichen wechseln. Man kann den Winkel auch allenfalls auf 180° ergänzen, wenn man den spitzen Zwischenwinkel berechnen will.)

Aufgabe 5: Berührung zweier Kurven

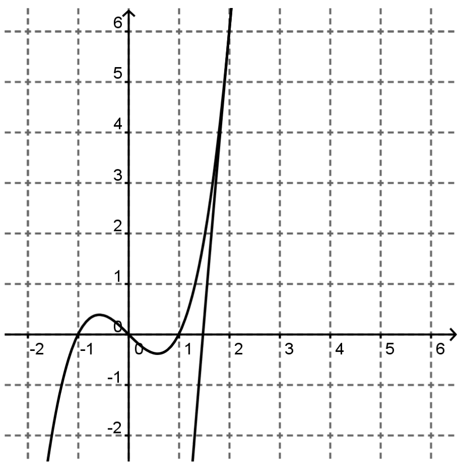
Zeige, dass sich die beiden Kurven $y = x^3 – x$ und $y = –x^2 + 15x – 20$ berühren.

Lösung zur Aufgabe 5:
Das ist eine Beweisaufgabe und die hat keine Lösungszahl.

Lösungsweg (Musterlösung) zur Aufgabe 5:
Zuerst müssen wir uns überlegen, wie wir die Berührung von zwei Kurven mathematisch genau beschreiben können:

Zwei Kurven berühren sich, wenn sie in einem gemeinsamen Punkt gleiche Steigung haben.

Zum genauen Vorgehen: Wir lassen uns die beiden Kurven $y_1(x) = x^3 – x$ und $y_2(x) = –x^2 + 15x – 20$ grafisch anzeigen. (Die Parabel $y_2(x)$ ist im gezeichneten Ausschnitt sehr steil und sieht daher fast wie eine Gerade aus.)



Dann berechnen wir die gemeinsamen Punkte (oder zumindest die x-Koordinaten davon). Wir setzen also die Funktionswerte gleich und erhalten $x_1 = 2$ resp. $x_2 = –5$.

Die y-Koordinaten davon benötigen wir für die weiteren Berechnungen eigentlich nicht.
Der Vollständigkeit halber sind sie noch angefügt: Wir erhalten $y(2) = 6$ und $y(–5) = –120$ und somit die gemeinsamen Punkte (2 | 6) und (–5 | –120).

Es gibt also zwei gemeinsame Punkte. Die weiteren Berechnungen müssen wir für die beiden Punkte einzeln machen.

Wir berechnen $y_1'(2) = 11$. Das ist die Steigung der ersten Kurve im Schnittpunkt. Ebenso erhalten wir $y_2'(2) = 11$. Diese Steigung ist dieselbe.

Somit berühren sich die beiden Kurven an der Stelle $x = 2$. Damit ist die Aufgabe gelöst.

Zusatzbemerkung 1: Die gemeinsame Kurventangente im Berührpunkt erhält man analog wie in Aufgabe 3. Die Tangente hat die Gleichung $y = 11x - 16$.

Zusatzbemerkung 2: Für den anderen Punkt setzen wir $x = -5$ und erhalten $y_1'(-5) = 74$ sowie $y_2'(-5) = 25$. In diesem Punkt schneiden sich also die Kurven. Der Schnittwinkel ist allerdings nur 1.516° und wäre grafisch nicht sofort zu erkennen. Die Berechnung verläuft gleich wie in Aufgabe 4.

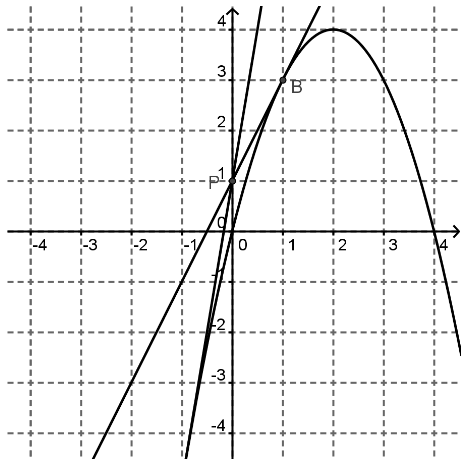
Aufgabe 6: Tangente von einem Punkt aus an eine Kurve legen

Bestimme eine Kurventangente an die Kurve $y = -x^2 + 4x$, welche durch $P(0 \mid 1)$ geht.

Lösung zur Aufgabe 6: $y = 6x + 1$ und $y = 2x + 1$ (die Aufgabe hat 2 Lösungen)

Lösungsweg (Musterlösung) zur Aufgabe 6:

Da wir eine Tangente suchen, können wir sofort den Ansatz $y = m \cdot x + v$ machen.



Die gesuchte Gerade muss mehrere Bedingungen erfüllen: sie muss durch P gehen und sie muss die gegebene Kurve berühren.

Weil die Gerade durch P gehen muss, können wir die Koordinaten von P einsetzen:

$1 = m \cdot 0 + v$, also $v = 1$ und damit vereinfacht sich unser Ansatz zu $y = m \cdot x + 1$.

Jetzt sollen sich die Kurve und die Gerade berühren. Gemäss Aufgabe 5 müssen sie im gemeinsamen Punkt die gleiche Steigung haben.

Der gemeinsame Punkt führt zur Gleichung $-x^2 + 4x = m \cdot x + 1$
Die gleiche Steigung führt zur Gleichung $-2x + 4 = m$

(In der unteren Gleichung steht links vom Gleichheitszeichen die Steigung, also die 1. Ableitung der Kurve; rechts vom Gleichheitszeichen die Steigung der Geraden.)

Dieses Gleichungssystem können wir nach x und m auflösen.
Die Lösungen $m_1 = 2$ resp. $m_2 = 6$ liefern uns die Tangenten $y = 2x + 1$ resp. $y = 6x + 1$.

Die entstandenen Lösungen für x benötigen wir eigentlich nicht, aber sie haben eine klare Bedeutung: Es sind nämlich die x-Koordinaten der Berührpunkte der Tangenten mit der Kurve.

Zusatzinformation: Die Berührpunkte haben die Koordinaten $(1 \mid 3)$ resp. $(-1 \mid -5)$.

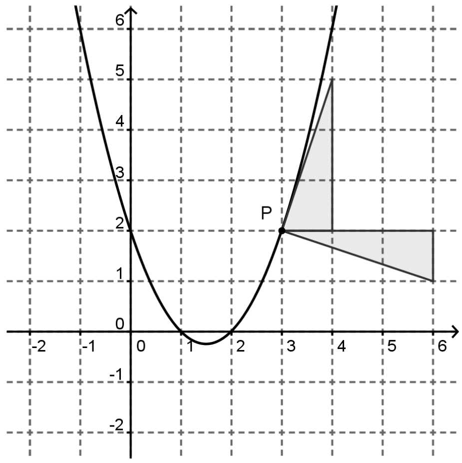
Aufgabe 7: Kurvennormale

Errichte im Punkt (3 | ...) der Kurve $y = x^2 - 3x + 2$ die Kurvennormale.
(Die Kurvennormale ist das Lot auf die Kurventangente.)

Lösung zur Aufgabe 7: $y = -\frac{1}{3}x + 3$

Lösungsweg (Musterlösung) zur Aufgabe 7:
Die ersten zwei Schritte dieser Aufgabe kamen früher schon vor:

a) Zuerst benötigen wir die fehlende Koordinate des Kurvenpunktes. Wir erhalten y(3) = 2. Der Kurvenpunkt ist also P(3 | 2).
b) Die Steigung der Kurve in P beträgt y'(3) = 3.



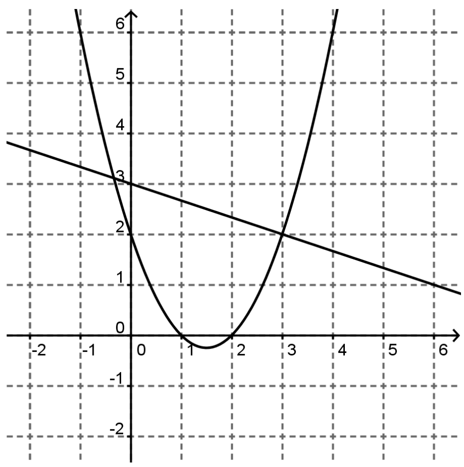
Jetzt benötigen wir die Steigung der Kurvennormalen. Wir müssen also das Lot auf die Tangente errichten.

Wir kennen die Tangentensteigung $m_1 = 3$. (Auf eine Einheit nach rechts geht es drei Einheiten nach oben.) Die Figur rechts sollte klarstellen, dass die Steigung des Lotes $m_2 = -1/3$ beträgt. (Auf drei Einheiten nach rechts geht es eine Einheit nach unten.)

Die beiden Hypotenusen stellen die Tangente resp. die Normale dar. Das obere Dreieck muss man um 90° drehen, um das untere zu erhalten.

Allgemein gilt für die Tangentensteigung m_1 und die Normalensteigung m_2 die Formel $m_2 = -\frac{1}{m_1}$. (In der Figur können wir die 3 durch m_1 ersetzen.)

Oder noch besser und durchaus merkenswert:
Zwei Kurven schneiden sich rechtwinklig, wenn $m_1 \cdot m_2 = -1$.



Wenn wir jetzt aber die Steigung der Kurvennormalen kennen, dann können wir für diese gesuchte Gerade den Ansatz $y = -1/3 \cdot x + v$ machen.

Das fehlende v erhalten wir, indem wir die Koordinaten von P(3 | 2) einsetzen. Das ergibt v = 3.

Somit ist die Gleichung der Kurvennormalen gefunden und es gilt $y = -\frac{1}{3}x + 3$.

Zusatzbemerkung: die Normale schneidet die Kurve im Punkt (3 | 2) rechtwinklig. Es gibt auch noch einen zweiten Schnittpunkt, der uns aber nicht interessiert.

Liebe Schülerin, lieber Schüler.

Du bist am Ende des Leitprogramms angelangt. Damit du das Gelernte festigen kannst, hat es im Skript einige sehr empfehlenswerte Übungen.

****