

AM II: Lineare Algebra

Lösungen

1. Matrizenkalkül, lineare Abbildungen

- a) Wenn die Spaltenanzahl der ersten Matrix gleich der Zeilenanzahl der zweiten ist.
- b) Siehe rechts
- c) Vektorgeometrisch durchrechnen.
- d) Drehstreckung mit Faktor f und Winkel α
 $f = \sqrt{13}$, $\alpha = -56.31^\circ$

The top screenshot shows the calculator interface with the following steps:
 - Input: $\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & t \end{bmatrix}\right)$ resulting in $2 \cdot (t - 6)$.
 - Input: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & t \end{bmatrix}^{-1}$ resulting in $\begin{bmatrix} t & -3 \\ 2 \cdot (t - 6) & 2 \cdot (t - 6) \end{bmatrix}$.
 - Input: $[2,3;4,t]^{-1}$ resulting in $\begin{bmatrix} t & -3 \\ -2 & 1 \\ t-6 & t-6 \end{bmatrix}$.

The bottom screenshot shows the same operations with numerical values:
 - Input: $\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}\right)$ resulting in $2 \cdot (7 - 6) = 2$.
 - Input: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}^{-1}$ resulting in $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 2 \cdot (7 - 6) & 2 \cdot (7 - 6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.
 - Input: $[-24/25, 7/25; 7/25, 24/25]$ resulting in $\begin{bmatrix} -24/25 & 7/25 \\ 7/25 & 24/25 \end{bmatrix}$.

2. Wirtschaftsanwendung

- Matrix speichern.
- a) Verbrauchsvektor ausrechnen.
- b) Produktionsvektor mit der Inversen Matrix bestimmen.

The screenshot shows the calculator interface with the following steps:
 - Input: $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 18 & 25 & 20 \\ 78 & 64 & 90 \end{bmatrix}$ (Matrix M).
 - Input: $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 181 & 157 & 220 \\ 8 & 11 & 7 \end{bmatrix}$ (Matrix M inverse).
 - Input: $M^{-1} \cdot [78; 64; 90]$ resulting in $\begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ 7 \end{bmatrix}$.

3. Eigenwerte und Eigenvektoren

- a) $\det(M - tI) = 0$, nach t auflösen.
- b) Eigenwert -1 mit Vektor $(0; 1)$
 Eigenwert 1 mit Vektor $(2; 1)$.
- c) Es handelt sich um eine schiefe Spiegelung. Die Achse geht durch $(0 | 0)$ und $(2 | 1)$, die Spiegelungsrichtung ist parallel zur y -Achse.

The screenshot shows the calculator interface with the following steps:
 - Input: $\text{eigV1}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right)$ resulting in $\langle -1, 1 \rangle$.
 - Input: $\text{eigVc}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right)$ resulting in $\begin{bmatrix} 0.894427 \\ 1.447214 \end{bmatrix}$.
 - Input: $\text{eigvc}\langle [1,0]; [1,-1] \rangle$.

4. Markow-Ketten

- Zuerst die Übergangsmatrix bestimmen.
- Für die stabile Lage $x + y = 1$ berücksichtigen.
- Die minimale Lösung beinhaltet 25 Taxis, nämlich 15 am 1. Standort und 10 am 2. St.
- Dann wechseln jeweils 3 Taxis den Platz.

The screenshot shows the calculator interface with the following steps:
 - Input: $\begin{bmatrix} .8 & .2 \\ .3 & .7 \end{bmatrix}$ (Transition matrix).
 - Input: $\text{solve}(.8 \cdot x + .3 \cdot y = x \text{ and } x + y = 1, \{x, y\})$ resulting in $x = .6 \text{ and } y = .4$.
 - Input: $[15, 10] \cdot \begin{bmatrix} .8 & .2 \\ .3 & .7 \end{bmatrix}$ resulting in $[15, 10]$.
 - Input: $[15, 10] * [.8, .2] [.3, .7]$.